Núcleo de Informática Aplicada à Educação
Universidade Estadual de Campinas

Resumo

O presente artigo propõe uma estratégia metodológica alternativa para o ensino de geometria nos 1º e 2º Graus de Matemática. Esta proposta aborda como a Geometria encontrada na natureza poderia ser ensinada com maior motivação e interesse para nossos alunos através da Geometria da Tartaruga, subjacente ao Sistema computacional Logo, objetivando tornar a Matemática contextualizada e real, propiciando sua compreensão efetiva.

Mais especificamente, esta estratégia metodológica apresenta alguns projetos que elucidam como figuras geométrica de formas clássicas encontradas ao nosso redor, como favo de mel das abelhas européias, podem ser relacionadas com conceitos matemáticos como: Coordenadas Polares, Isoperimetria, Ângulos Volumes Prismas, Poliedros, entre outros, conceitos estes aparentemente abstratos, que porém, tratados de modo sugerido, poderiam ser assimilados e compreendidos pelos alunos de forma simples e significativa, oferecendo elementos para que os professores reflitam e redimensionem essas teorias de trabalho e métodos de ensino.

NIED - Memo N° 29
1995

A Geometria Encontrada na Natureza Estudada Através da Geometria da Tartaruga

Rosana Giaretta Sguerra Miskulin
Maria Lúcia Bontorim de Queiroz
Maria de Lourdes B. Konezuk

Cidade Universitária "Prof. Zeferino Vaz"
Prédio V da Reitoria - 2º Piso
13083-970 - Campinas - SP
Telefones: (019) 3788-7350 ou 3788-7136
Fac-símile: (19) 3788.7350 e 3788.7136 (ramal 30)

A Geometria encontrada na natureza estudada através da Geometria da Tartaruga

Rosana Giaretta Sguerra Miskulin[1]
Maria Lúcia Bontorim de Queiroz[2]
Maria de Lourdes B. Konezuk[3]

1. Introdução

Harold Abelson and Andrea A. diSessa, (1981) afirmam em seu livro: Turtle Geometry - The Computer as a Medium for Exploring Mathematics, que: "O fato mais importante para lembrar-se sobre a Geometria da Tartaruga, é que ela é uma Matemática, arquitetada para incitar ou propiciar a investigação ou a exploração, e não apenas uma matemática que apresentam teoremas e suas demonstrações."

Analisando este contexto, o presente artigo propõe alguns projetos que elucidam como figuras geométricas de formas clássicas encontradas ao nosso redor, por exemplo, o dado que é cúbico, a bola de futebol que é esférica, o azulejo que é quadrado, entre outros, são identificados e aprendidos com maior motivação e interesse através da Geometria da Tartaruga, ou seja, uma criança ou adolescente, trabalhando com Logo, aprenderá com maior afetividade e interesse conceitos geométricos relativamente complexos de uma forma simples e significativa, sem a demasiada abstração e formalização da Matemática.

[1] Núcleo de Informática Aplicada à Educação – NIED/UNICAMP
[2] IMECC/UNICAMP
[3] Aluna do Curso de Especialização do IMECC/UNICAMP

2. Objetivos

- Trabalhar e elucidar conceitos geométricos pertencentes ao Currículo de 1º e 2º Graus de Matemática de uma maneira construtiva e significativa, através da Geometria da Tartaruga;
- Identificar e elucidar como as atividades Logo, propostas na Literatura Logo, propiciam o aprendizado de conceitos geométricos aparentemente abstrato de uma maneira simples e concreta;
- Identificar os conceitos matemáticos envolvidos no desenvolvimento dos projetos trabalhados;
- Identificar os conceitos inerentes à Geometria da Tartaruga com os conceitos de Coordenadas Polares e Isoperimetria;
- Estimular o uso do computador através da Linguagem Computacional Logo na pedagogia de conteúdos e na pedagogia de processos metodológicos que possam propiciar a melhora do ensino dos conceitos pertencentes ao currículo de 1º e 2º graus, de Matemática.
- Despertar na criança ou adolescente, através de um processo dinâmico de Resolução de Problemas, o interesse de assimilar, compreender e aplicar os conceitos de Matemática envolvidos e transpô-los para situações novas.

3. Apresentação do projeto

As formas poliédricas são encontradas na natureza; o favo de mel das abelhas européias são poliédricos, assemelham-se a prismas hexagonais, que se encaixam perfeitamente compondo o favo do mel. Existem prismas triangulares e prismas quadrangulares que também se encaixam, porém as abelhas européias "preferem" os alvéolos hexagonais. Convém perguntarmos o por que desta "preferência".

3.1 As abelhas precisam ladrilhar[4]

Sabe-se que os únicos polígonos regulares que permitem o ladrilhamento são o triângulo, o quadrado e o hexágono. Este fato é possível quando o ângulo interno do polígono é divisor de 360. Como propiciar uma situação de aprendizagem, em que o aluno chegue a esta conclusão através do Logo? Uma estratégia metodológica poderia constituir-se em sugerir ao aluno para que este construa na tela um triângulo equilátero. Este triângulo seria a base do prisma triangular. Um segundo passo, seria incitar o sujeito a construir o prisma triangular. Como construir vários prismas triangulares ocupando todo o espaço que envolve o primeiro prisma?

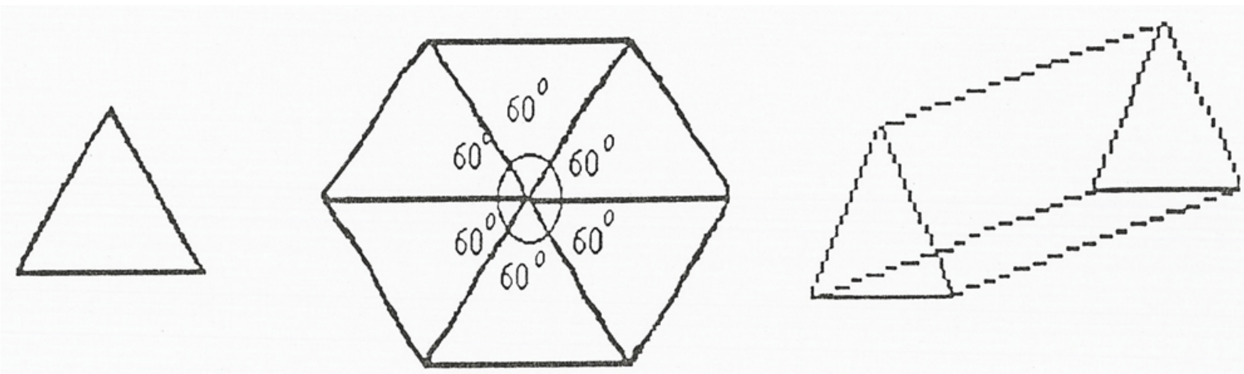
[4] Neste contexto, a palavra ladrilhar significa um perfeito encaixe, isto é, ladrilhamento é visto como a composição de polígonos regulares, na qual existe um encaixe perfeito, em outras palavras, não sobram ângulos e nem tampouco faltam.

A sugestão seria que os alunos primeiramente pensassem apenas nas bases. Em seguida tentassem ladrilhar utilizando o triângulo equilátero. Então lançar a seguinte questão:

Como ficariam os alvéolos?

3.2 Apresentação da Construção do problema com a Geometria da Tartaruga

Ladrilhamento com o triângulo



Procedimentos:

```
aprenda aresta :a :tl :a
pd :a pf :tl pe :a
fim

aprenda poligono :p :q :r
repita :p [pf :q pd :r]
fim

aprenda dst :t
un mudex :t/2
mudey (t/2* 1,732)ul
fim

aprenda tri :t
repita 3 [pf :t pd 120]
fim
```

```
aprenda prisma :t :a :tl
pd 30 tri :t
arestal :a :tl :a
tri :t dt0 :t
aresta :a :tl :a dst :t
arestal :a :tl :a dt
fim

aprenda dt0 :t
un mudex :t
mudey 0 ul
fim

aprenda arestal :a :tl :a
pd :a pf :tl pe :a
fim
```

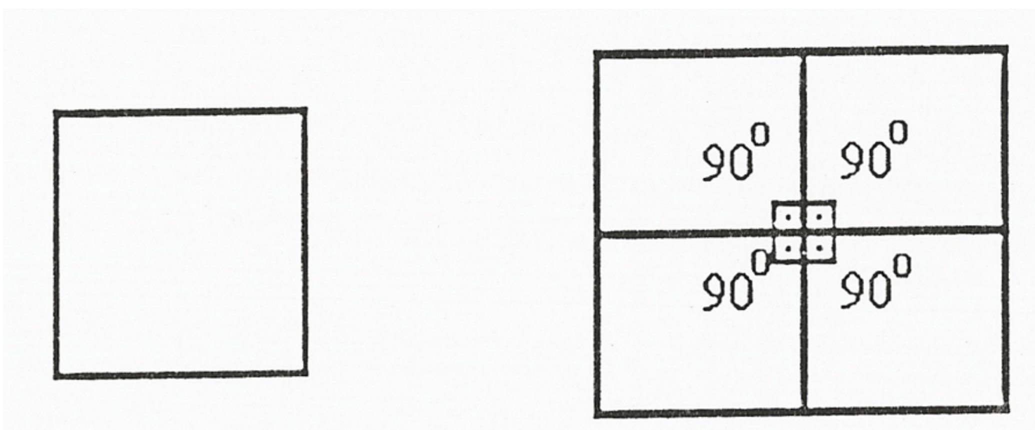
```
aprenda triângulo
ul mudecl l pd 30
poligono 3 40 120
pd 30 un pf 5 ul mudecl
un pt 5 pe 60 ul
fim

aprenda mude :x :y
un mudex :x
mudey :y ul
fim
```

```
aprenda ladril
mude -100 0 triângulo
mude 30 0 ladritr dt
fim

aprenda ladritr
repita 6 [triângulo pd 60]
fim
```

Nesse momento da interação o professor poderia lançar mão da seguinte pergunta:

E agora, podemos mudar a base? Quais são as bases regulares que podem ladrilhar desse modo? Construa o quadrado. Depois o pentágono e em seguida o hexágono. O que você concluiria disso? Por que não poderia ser o pentágono? E os outros polígonos regulares?

Ladrilhamento com o quadrado:

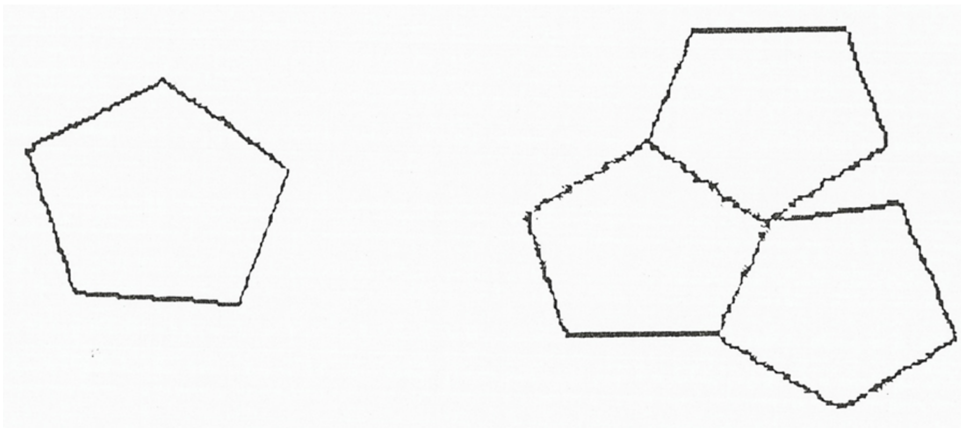


Procedimentos:

```
aprenda quadradov
ul mudecl 1
polígono 4 30 90
un pd 45 pf 5
ul mudecl 8 pinte
un pt 5  pe 45 ul
fim
```

```
aprenda ladriqua
repita 4 [quadradov pd 90]
fim
```

Tentativa de ladrilhamento com o pentágono:



Procedimentos:

```
aprenda pentágono
ul mudecl l poligono 5 25 72
pd 45 un pf 5 ul mudecl 12 pinte
un pt 5 pe 45
fim
```

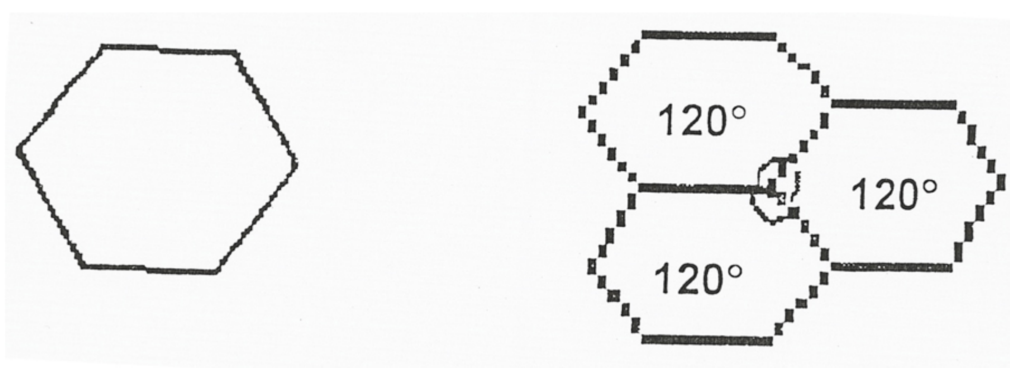
```
aprenda ladripen l
repita 3 [pentágono pe 108]
fim
```

```
aprenda ladri3
mude -80 0 pentágono
mude 30 20 ladripenl
mudecf 15
fim
```

```
aprenda ladripen2
repita 4 [pentágono pd 108]
fim
```

O pesquisador, nesse momento intervém e pergunta:

O que você verificou? Tente agora ladrilhar com o hexágono:

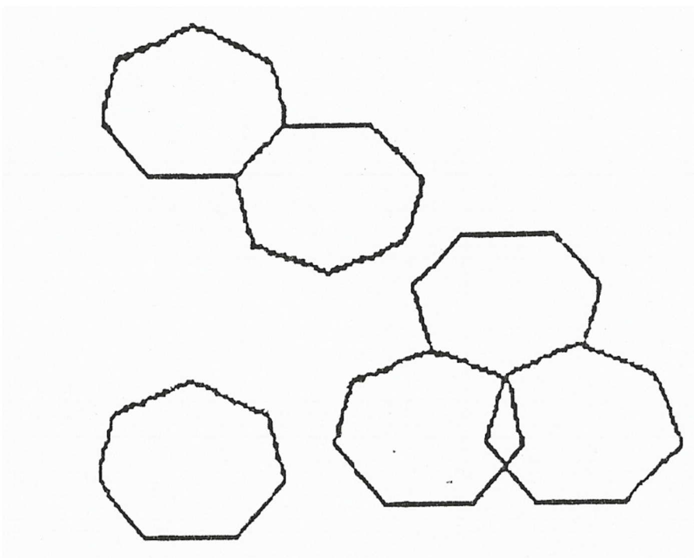


```
aprenda hexágono
ul mudecl l
polígono 6 20 60
pd 45 un pf 5 ul mudecl 13 pinte
un pt 5 pe 45 ul
fim
```

```
aprenda ladrihex
repita 3 [hexágono pd 120]
fim
```

```
aprenda ladri4
mude -75 0 hexágono
mude 30 0 ladrihex
dt mudecf 10
fim
```

E com o heptágono ?



```
aprenda heptágono
ul mudecl 1 polígono 7 20 51,4
un pd 45 pf 5 ul mudecl 6 pinte
un pt 5 pe 45 ul
fim
```

```
aprenda ladrihept
repita 2 [heptágono pd 129]
fim
```

```
aprenda ladri5
mude –75 20 heptágono
mude 30 20 ladrihept
mude –30 –45 ladrihept2
mudecf 7 dt
fim
```

```
aprenda ladrihept2
repita 3 [heptágono pd 129]
pe 26,4 heptágono
fim
```

Tendo analisado a descrição do programa do aluno, o professor pergunta: O que você observou ?

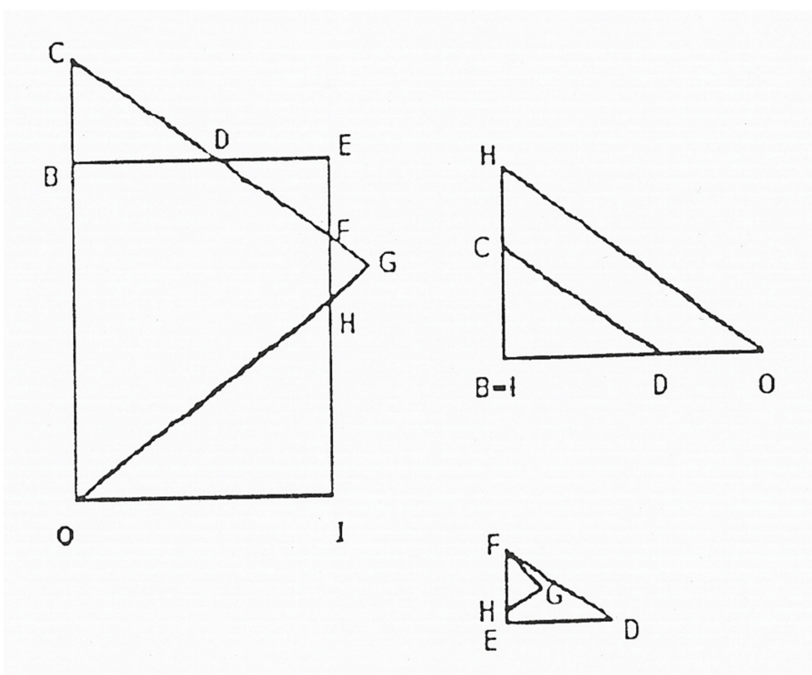
A finalidade desse problema é fazer com que o aluno chegue na seguinte conclusão:

O ângulo do polígono regular deve ser divisor de 360. Desse modo, os únicos polígonos regulares que permitem ladrilhamento são o triângulo, o quadrado e o hexágono.

Até esta parte o aluno terá oportunidade de aprender a construir os polígonos regulares, necessitará aprender a relação existente entre os ângulos internos e o número de lados do polígono regular, estando envoldos nisso, outros conceitos básicos da Geometria como por exemplo o de ângulo, entre outros.

3.3 Conceitos de Isoperimetria

As abelhas armazenam mais mel usando a mesma quantidade de cera - Isoperimetria. Neste momento o professor poderia sugerir um problema isoperimétrico, ou seja, supor um certo segmento de reta q e com esse mesmo segmento, os alunos construiriam na tela o quadrado, o triângulo e o hexágono. Uma segunda fase seria propor aos alunos a sobreposição das áreas dos polígonos regulares dois a dois: sobrepor primeiro somente dois deles, como mostra-nos a figura abaixo:



Procedimentos:

```
aprenda iso
un mudepos [-100 -20] ul
quatri 4 300 quatri 3 300
colorir
fim

aprenda quatri2:q
un mudepos [20 -50]ul
pf q/17,14 pd 90 + arctan 9,6/17,14
pf q/8,27 pd 90 + arctan 17,14/9,6
pf :q/9,6 pd 90
pintar 80:q/20 10
repita 3 [pf:q/20 pd 120]
pintar 30:q/30 8
fim

aprenda areal
dt iso
quatriger 300 quatri2 300
fim

aprenda quatrila :q
pf :q/6,85 pd 90 + arctan 6,85/12
pf :q/3,43 pd 90 + arctan 12/6,85
pf :q/4 pd90
pintar 45 :q/20 10
fim

aprenda quatrilb:q
pf :q/12 pd 90 + arctan 6,85/12
pf :q/6 pd 90 + arctan 12/6,85
pf :q/6,85 pd 90
pintar 45 :q/24 8
fim
```

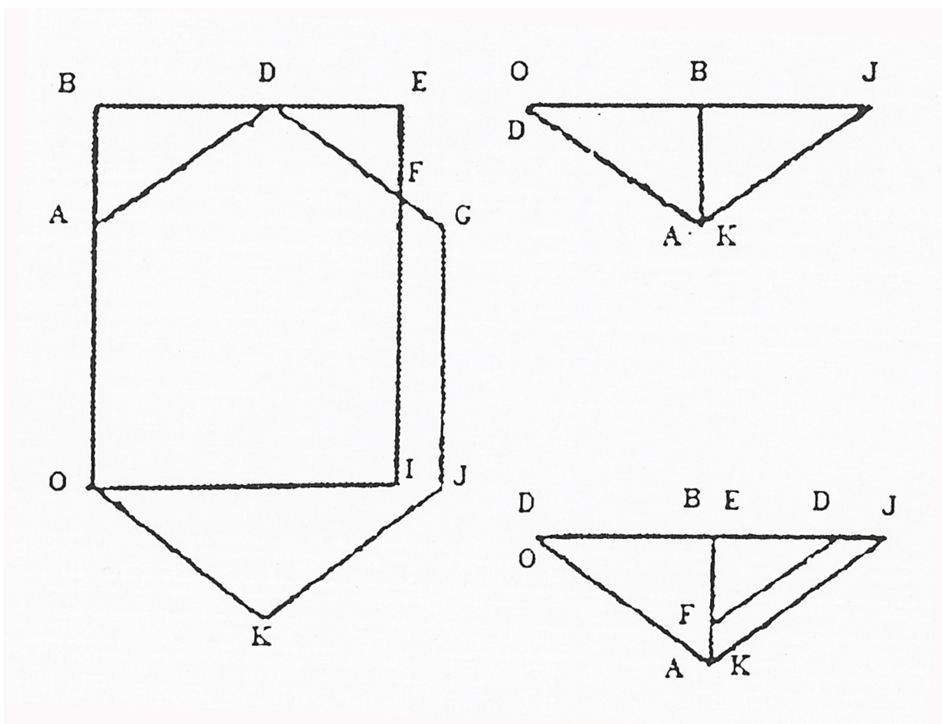
```
aprenda quadriger:q
un mudepos [20 10] ul
quatrila:q quatrilb:q
fim

aprenda quatri:n:q
repita :n[pf:q/n pd 360/:n]
fim

aprenda pintar :a :t :c
pd :a un pf :t mudecl :c pinte
un pt :t pe :a ul mudecl 15
fim

aprenda colorir
pintar 30 20 12 pintar 75 10 10
pintar 45 95 10 pintar 10 80 6
pintar 57 95 6
fim
```

Após essa estratégia o professor poderia lançar a seguinte questão: Qual deles possue maior área?

Diante deste desfio, o aluno, analisando o que ele construiu, verifica que existe uma área comum entre os dois polígonos e que a área do quadrado OBEI é igual a área comum BDFHO mais as áreas dos dois triângulos retângulos DEF e OIH, pois considerando o triângulo como um conjunto de pontos, observa-se claramente que o triângulo retângulo maior OIH contém o triângulo BCD e também que o triângulo BCD e também que o triângulo retângulo DEF contém o triângulo equilátero FGH, portanto a área do quadrado é maior que a da área do triângulo.

Percorrendo o mesmo objetivo, o professor sugere nesse momento, para o aluno sobrepor a maior área encontrada (quadrado) com a do hexágono.

Desse modo o aluno poderia criar o seguinte programa:




```
aprenda quahex2
mude -80 -10
quahex 4 300
fim


aprenda area2
quahex2 tri01
tri04 300
fim

pint 45 10 10
ul mudecl 1 quahex 6 300
pint 45 6 12 pint 105 6 6
fim
```

```
aprenda tri01
mude 70 40 tri0 300
ul mudecl l pf 25
pint -135 4 10
fim

aprenda quahex :n :q
repita :n[pf :q/:n pd 360/:n]
fim

aprenda tri02
tri0 300
fim
```

```
aprenda tri0:q
pd 60 pf :q/6 pe 150
pf 2 * (cos 30) *:q/6
pe 150 pf :q/6 pe 120
un pf 10 ul mudecl 8 pinte un pt 10
ul
fim
```

```
aprenda pint :a :d :c
pd :a un pf :d ul mudecl:c
pinte
un pt :d ul pe
fim
```

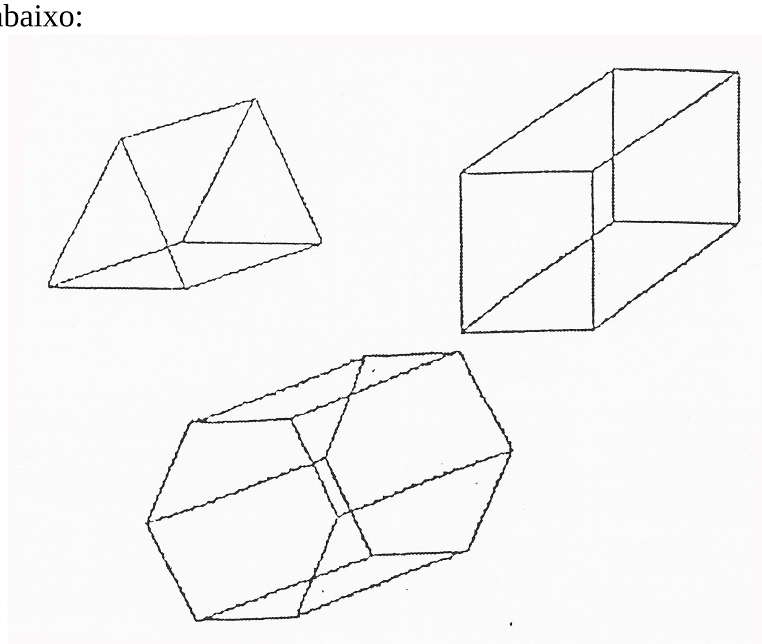
Analisando os procedimentos acima, o aluno poderia verificar que ambos os polígonos tem uma área comum, mas que o hexágono contém além desta área comum, a área restante do quadrado. Assim pode concluir que o hexágono é a figura de maior área. Com isso verifica-se através do Logo que as abelhas européias constróem seus alvéolos em forma de prisma hexagonal, uma vez que elas escolhem o de maior volume (maior área da base) para armazenar o mel.

Convém ressaltar nesse momento, que a verificação matemática do resultado acima seria: O triângulo de perímetro q terá lados com a medida q/3 e consequentemente sua área será $q^2/12\sqrt{3}$. Por sua vez cada lado do quadrado deverá medir q/4 e consequentemente sua área será $q^2/16$. Finalmente o lado do hexágono medem q/6 e portanto sua área será $q^2/8\sqrt{3}$.

Ora temos:$q^2/12\sqrt{3} < q^2/16 < q^2/8\sqrt{3}$.

E portanto, com o mesmo perímetro a figura de maior área é o hexágono.

Assim sendo, analisando os prismas de altura h teríamos respectivamente volumes, apresentados na figura abaixo:



Desse modo, o volume do prisma triangular seria $q^2/12\sqrt{3}$, o volume do prisma quadrangular seria $q^2h/16$ e o do prisma hexagonal seria $q^2h/8\sqrt{3}$.

Teremos: $q^2h/12\sqrt{3} < q^2h/16 < q^2h/8\sqrt{3}$.

Procedimentos com Logo:

Prisma Triangular

```
aprenda prisma1 :t :a :t1
pd 30 tri :t
arestal :a :t1 :a
tri :t dt0 :t
aresta :a :t1 :a
dst: t
aresta :a :t1 :a
dt
fim
```

```
aprenda tri :t
repita 3 [pf :t pd 120]
fim
```

```
aprenda aresta :a :t1 :a
pd :a pf :t pe :a
fim
```

```
aprenda dt0 :t
un mudex :t
mudey 0 ul
fim
```

```
aprenda dst :t
un mudex :t/2
mudey (:t/2 * 1,732) ul
fim
```

```
aprenda arestal :a :tl :a
pd :a pf :tl pe :a
fim
```

Prisma Quadrangular

```
aprenda cubo :t :a :tl
q :t aresta :a :tl :a
q :t ds0t :t
aresta :a :tl :a
dstt :t
aresta :a :tl :a
dst0 :t
aresta :a :tl :a dt
fim
```

```
aprenda aresta :a :tl :a
pd :a pf :tl pe :a
fim
```

```
aprenda dstt :t
un mudex :t
mudey :t ul
fim
```

```
aprenda q :t
repita 4 [pf :t pd 90]
fim
```

Prisma Hexagonal

```
aprenda hexa :t
repita 6 [pf :t pd 60]
fim
aprenda prisma2 :t :a :t2
pd 30
hexa :t
aresta2 :a :t2 :a
hexa :t dst2 :t
aresta2 :a :t2 :a
dst3 :t
aresta2 :a :t2 :a
dst4 :t
aresta2 :a :t2 :a
dst5 :t
aresta2 :a :t2 :a
dst6 :t
aresta2 :a :t2 :a dt
fim
```

```
aprenda aresta2 :a :t2 :a
pd :a pf :t2 pe :a
fim

aprenda dst2 :t
un mudex :t/2
mudey :t * 0,866 ul
fim

aprenda dst3 :t
un mudex :t * 3/2
mudey :t * 0,866 ul
fim

aprenda dst4 :t
un mudex :t *2
mudey 0 ul
fim
```

```
aprenda dst5 :t
un mudex :t *3/2
mudey :t * -0,866 ul
fim
```

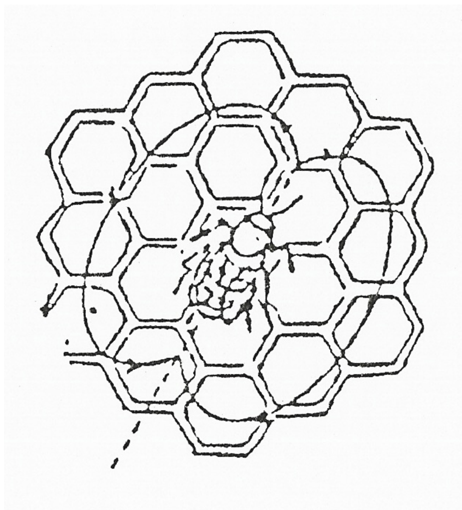
```
aprenda dst6 t
un mudex :t * 1/2
mudey :t * -0,866 ul
fim
```

Vale ressaltar que um outro conceito matemático, cujo aprendizado pode ser motivado através de "coisas" da natureza é o de COORDENADAS POLARES. Para tanto, o professor poderia lança mão do seguinte questionamento:

Como a abelha "contaria" para suas companheiras onde foi que ela encontrou a fonte de alimento?

Sabe-se que a linguagem das abelhas descoberta por K. Von Frisch (citado por Batchelet, E.; 1984) diz que, quando uma abelha encontra uma fonte de alimento, ela voa de volta à colméia, mostra uma pequena quantidade de alimento e dança na superfície vertical do favo para transmitir às suas companheiras o local da fonte de alimento e a distância da colméia à fonte. Se o alimento está a mais de 100m, ela corre para frente, retorna em semi-círculo ao ponto de partida, corre novamente em linha reta, descreve outro semi-círculo em direção oposta e assim por diante com uma certa alternância.

Um caminho vertical para cima significa que a fonte de alimento está na direção do sol. Se o caminho faz um ângulo **a** à direita do eixo vertical do favo, significa que o alimento está **a** graus à direita do sol. A distância da colméia à fonte é assinalada pelo número de corridas por unidade de tempo(frequência). O professor poderia sugerir para o aluno que ele reproduzisse na tela, uma cena que representasse a abelha transmitindo para suas companheiras o local da fonte. Por exemplo, supondo que a frequência com que ela desenvolve as corridas corresponda à uma distância de 120 passos da tartaruga em relação à colméia e que o ângulo é igual a 40º à direita da vertical, teríamos a seguinte representação:



Um procedimento em Logo poderia ser o seguinte:

```
aprenda fig4
mude -40 0 favo 7 7 dt
atat l at mudecl l
un mudepos [20 25]
ul repita 8 [pf 10 un pf 10 ul]
pd 40 pf 80 pt 160
un pf 60 ul mudecl 8 abelha
dançar pf 20
fim
```

```
aprenda favo :n :l
repita :n [filal :n :l]
fim

aprenda abelha
criafig :figura 10
mudefig 10
fim
```

```
aprenda dançar
dança1
dança2
pe 90
fim
```

```
aprenda dança2
pd 90 pf 50 pe 90
repita 180 [pf 50* 3,1416/360 pe 1]
fim
```

```
aprenda hexacomp :1
hexagon :1
un pf :1* 1,732 ul
fim
```

```
aprenda polígono :p :q :r
repita :p [pf :q pd :r]
fim
```

```
aprenda dançal
pf 50 pd 90
repita 180 [pf 50 * 3,1416/360
pd 1]
fim
```

```
aprenda fila1 :n :1
repita :n [hexacomp :1]
un pt :n* :1 *1,732
pd 150 pf :1 pe 60 pf :1 pe 90
fim
```

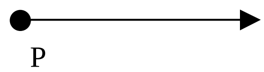
```
aprenda hexagon :1
ul mudecl 1 pd 30
polígono 6 :1 60
pint1 60 1 10 pe 30
fim
```

```
aprenda pintl :a :1 :c
pd :a un pf :1 ul
mudecl :c pinte
un pt :1 ul pe :a
fim
```

Desse modo, o professor sugeriria que o aluno analisasse os programas acima. O aluno poderia então concluir que as abelhas trabalham com um ângulo e uma distância, não usam portanto Coordenadas Cartesianas para assinalar a posição no plano. Como as abelhas então se localizam?

Tendo lançado o problema, o pesquisador poderia sugerir ao aluno que completasse a cena, supondo que a distância mencionada fosse de 120m e então localizarem, ou seja, elas usam Coordenadas Polares. Localize então na tela a origem do Sistema Cartesiano. Este ponto vai ser a origem do sistema de Coordenadas Polares e será chamado Polo. Agora o aluno poderia desenhar na tela somente a parte positiva do eixo dos x. Este vai ser o eixo de referência para o Sistema Polar. Pronto, o aluno já teria construído o referencial do sistema polar, conforme a programação abaixo:

```
aprenda sist :x
pd 90 pf :x
fim
```



Com a finalidade do aluno explorar esse referencial, o professor poderia sugerir a seguinte questão: Agora vamos localizar aí alguns pontos dados em Coordenadas Polares?

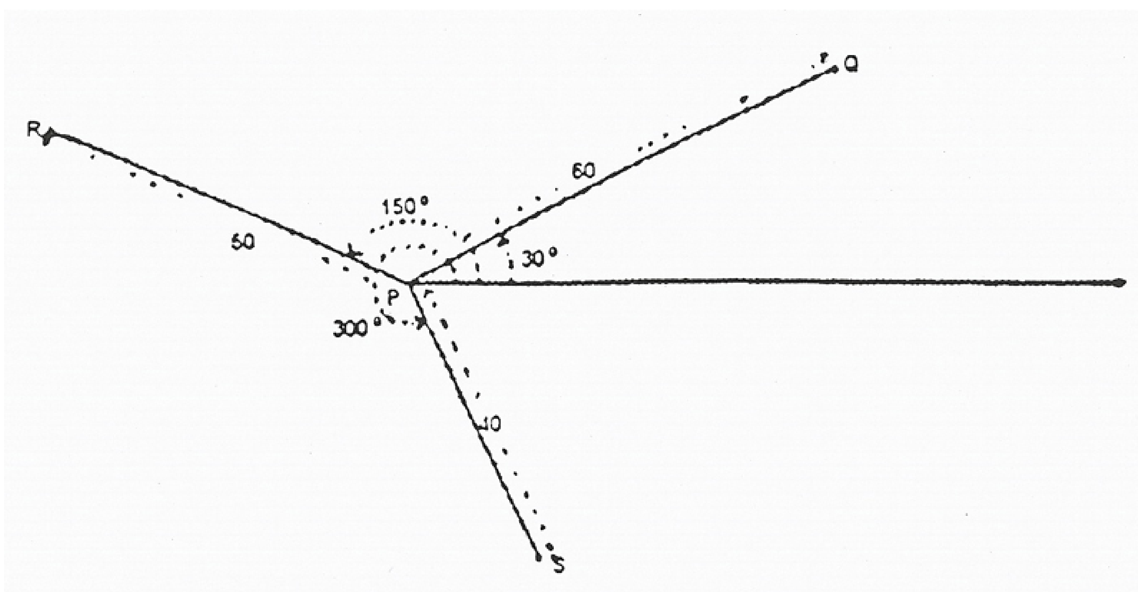
Um ponto Q dado em Coodenadas polares é conhecido quando é dada sua distância **r** ao polo P e o ângulo **a** que o seguimento de reta PQ faz com o eixo polar, usando como positivo, o sentido anti-horário. Os números **r** e **a** são chamados as Coodenadas Polares do ponto Q e denotamos: Q(r,a) onde **r** e **a** são números reais com r >0.

Nesse momento o professor poderia sugerir que o aluno tentasse primeiramente mandar a tartaruga localizar os seguintes pontos que estão em Coordenadas Polares, quais sejam:

a) Q (60,30)

b) R (50,150)

c) S (40,300)



Procedimentos:

```
aprenda pontoq
pd 90 pe 30 pf 60
fim

aprenda pontos
pd 90 pe 300 pf 40
fim
```

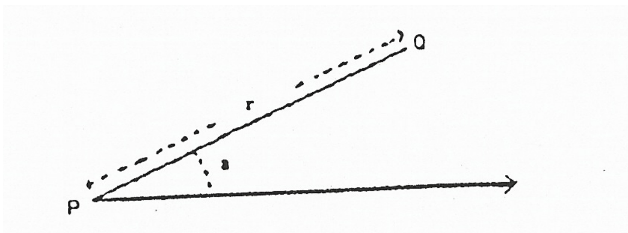
```
aprenda pontor
pd 90 pe 150 pf 50
fim

aprenda cpolares
pontoq un pe ul
pontor un pe ul
pontos
fim
```

Assim sendo, tendo compreendido e explorando estas idéias, o professor poderia sugerir que o aluno generalizasse este conceito para um ponto Q com coordenadas **r** e **a** quaisquer:

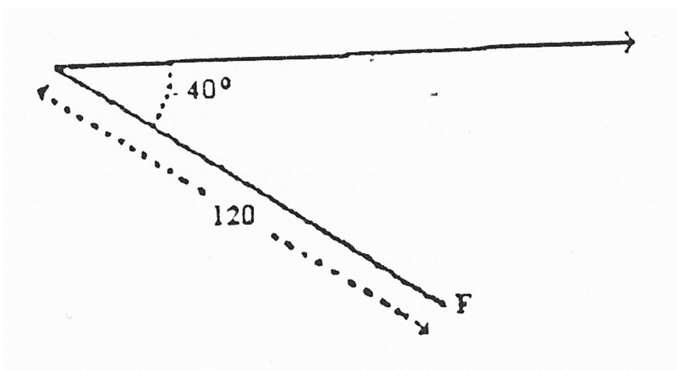
Procedimentos:

```
aprenda pontoq :r :a
sistp 90
pf 17,188 pe 90 mudecl l
repita :a[pe 0,3 pe l]
un pe ul pd 90 pe :a
mudecl 10 pf :r
mudecl l estre 30 3
mudecl 15 un pe ul dt
fim
```

```
aprenda estre :a :b
repita :a [pf :b pd(180-180/:a)]
fim
```



Uma nova estratégia seria sugerir que o aluno considerasse a colméia como Polo e a direção do sol como o eixo fixo e determinasse a posição F da fonte de alimento em Coordenadas Polares.



Procedimentos:

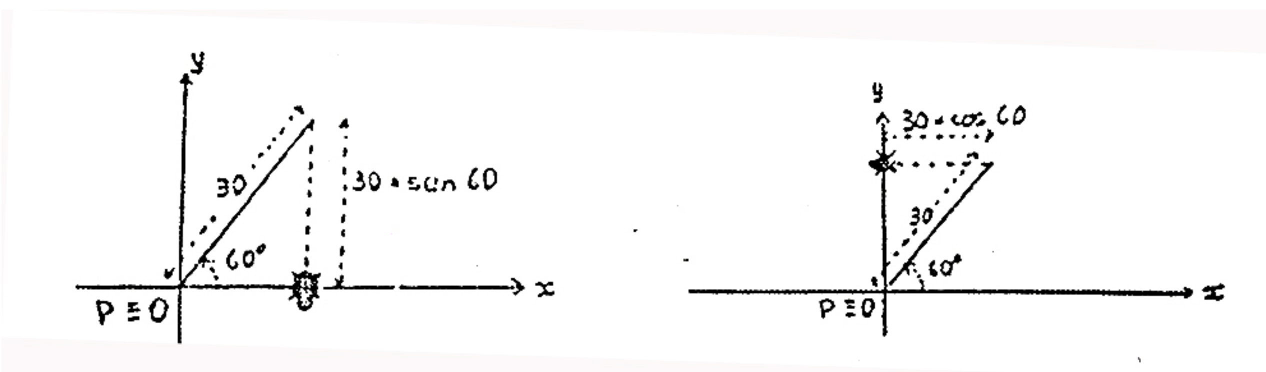
```
aprenda pontof
pd 90 pe 320 pf 120
fim
```

O professor poderia sugerir o seguinte problema: Você saberia agora localizar a fonte F usando Coordenadas Cartesianas?

3.4 "Ponte" entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas

Sugestão do Professor:

Tente mandar a tartaruga, a partir do Polo, caminhar até um ponto, por exemplo o ponto Q(30,60) dado em coordenadas polares. Gire a tartaruga para baixo na posição vertical. Tente fazer com que ela caminhe até o eixo dos x.



Quais seriam os conhecimentos anteriores do aluno que ele poderia transpor para esta situação? O aluno então naturalmente perceberia que a distância da tartaruga ao eixo x é igual a 30 * sen60, ou seja, a ordenada do ponto Q é 30 * sen60. Assim o aluno estaria transpondo seus conhecimentos anteriores de Trigonometria para a situação de Coordenadas polares no contexto Logo.

Fazendo o mesmo procedimento em relação ao eixo y, ele poderia concluir que a abscissa do ponto Q é 30 * cos60. Repetindo o procedimento com outros pontos ele generalizaria e chegaria a concluir que as coordenadas cartesianas de um ponto Q(r,a) são r * cos a e r * sen a. com isso, o aluno relacionaria o Sistema Cartesiano com o sistema Polar.

```
aprenda eixos :a
repita 4[pf :a pt :a pd 90]
pd 90
fim
```

```
aprenda coordex
eixos 90
pe 30 pf 60 pd 120
pf 60* sen 30
fim
```

```
aprenda coorcy
eixos 90
pe 30 pf 60 pe 150
pf 60* cos30
fim
```

Com o objetivo de verificar se o aluno compreendeu realmente os conceitos acima, o professor poderia sugerir que o aluno fizesse a tartaruga caminhar x unidades sobre o eixo x, girasse 90º para a esquerda e caminhasse y unidades para frente. Assim ela atingiria um ponto do plano de Coordenadas Cartesianas x e y. Depois disso, o aluno tentaria unir este ponto ao polo e consequentemente construiria um triângulo retângulo. Ao resolver este problema o aluno necessitaria saber:

a) A distância do ponto à origem e com isso provavelmente poderia transpor para a situação presente - Logo e relacionar com este nosso Sistema de Representação o Teorema de Pitágoras num triângulo retângulo. Poderá concluir assim que a Coordenada Polar r do ponto dado é escrita como: $x^2 + y^2$.
b) Qual o ângulo que a tartaruga deverá girar para percorrer esta trajetória? O aluno perceberia que ela deveria girar para a esquerda 90 + arctan y/x. Analisando o triângulo construído chegaria finalmente que a Coordenada Polar **a** do ponto é arctan y/x.

Procedimentos:

```
aprenda trio :x :y
mudecf 14
mudecl l eixos 80
pf :x pe 90 pf :y pe 90 + arctan :y/:x
pf rq (:x * :x + :y* :y)
un pc pd 85 pf 20 mudecl 10
pinte un pc ul
fim
```

Finalmente o aluno poderia compreender de modo significativo a "ponte", isto é, as interelações existentes entre Coordenadas polares e Coordenadas Cartesianas.

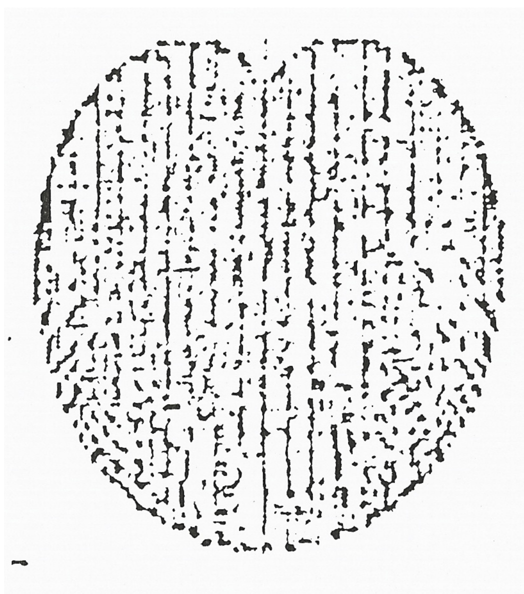
3.5 Aplicação de Coordenadas Polares em Logo usando Recursão

Região do plano limitada pelo gráfico da função r = b (1-sen a), a $\in$ [0 2π] - "Cardióide".

Procedimentos

```
aprenda cardioide :b :a
nudecf l mudecl 8 pd 90
cardioidel :b :a dt
fim
```

```
aprenda cardioidel :b :a
pf :b* (1 -sen :a) pe 1
se :a>360 [pare]
cardioidel :b :a + 1
fim
```



4. Resultados Esperados

Espera-se que com a abordagem usada no projeto desperte no educando o interesse, a motivação, a assimilação e a verdadeira compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos: Ângulo, Distância entre Dois Pontos, Polígonos Regulares - Perímetro e Áreas, Isoperimetria, Poliedros - Prismas - Volumes, Posição no Plano e no Espaço, Coordenadas Polares - Trigonometria, entre outros.

Espera-se também, ampliar as possibilidades do uso do computador, mais especificamente, com a Linguagem Computacional Logo, com a Geometria da Tartaruga, como ferramenta de ensino dos conceitos da Geometria tradicional, e desse modo, trabalhando com Logo, com a filosofia que permeou todo o projeto, a dicotomia certo-errado, que persegue o aluno desde a pré-escola até a vida futura, se torne irrelevante no processo ensino/aprendizagem da Geometria, além de outros conceitos "mal-formados", que poderiam estar acarretando uma aprendizagem não construtiva e significativa da Matemática.

Desse modo, espera-se com a abordagem dada a este projeto, propiciar subsídios teórico-metodológicos, para que os professores desta área repensem e reflitam sobre suas teorias e métodos de ensino, redimensionando sua proposta pedagógica, e desta forma, propiciem um aprendizado efetivo da Matemática.

5. Referências Bibliográficas

ABELSON. H. e A. diSessa. Turtle Geometry: The Computer as a Medium for Exploring Mathematics. MIT Press. 1981.

BATSCHELET, E., Introdução à Matemática para Biocientistas, Eds. Intersciência USP - São Paulo, 1984.

BENICE, D. D., Matematics: Ideas and Applications, Academic Press, Inc., 1978.

IMENES, L. M. P., JAKUBOVIC, J., Poliedros, Abelhas, Arquitetura e ... Futebol. Revista do professor de Matemática, nºs. 1 a 4, 1982 a 1984.

PAPERT, S., Logo: Computadores e Educação. Editora Brasiliense, 1985.