

Resumo

Propõe-se neste estudo delinear reflexões a respeito de nossa dissertação de Mestrado (Miskulin, 1994), a qual apresentou uma análise da Geometria Plana e Espacial inseridas na Educação Matemática, em uma abordagem histórico-crítica, de modo a proporcionar o esboço de um cenário composto pelas vertentes ou paradigmas que compuseram a Geometria. Utilizou-se para tal o desenvolvimento histórico da Matemática, mais especificamente da Geometria, inter-relacionando-as com a Geometria da Tartaruga, subjacente ao Sistema Computacional Logo (Papert, 1985 e Reggini, 1985), na forma bidimensional para a exploração da Geometria Plana e tridimensional para a exploração da Geometria Espacial. Este estudo apoiou-se na nossa concepção teórica embasada na História da Matemática e da Geometria e também na teoria do desenvolvimento cognitivo de Jean Piaget, segundo a complementaridade da Epistemologia e da Psicologia Genéticas.

NIED - Memo N^o 32

1996

**Logo e Educação Matemática $\frac{3}{4}$ Uma
Dimensão Microgenética do
Desenvolvimento Cognitivo**

Rosana Giaretta Sguerra Miskulin

Logo e Educação Matemática $\frac{3}{4}$ Uma Dimensão Microgenética do Desenvolvimento Cognitivo¹

Rosana Giaretta Sguerra Miskulin*

RESUMO

Em linhas gerais, propõe-se neste estudo delinear reflexões e tecer considerações a respeito de nossa dissertação de Mestrado (Miskulin, 1994), a qual apresentou uma análise da Geometria Plana e Espacial inseridas na Educação Matemática, em uma abordagem histórico-crítica, de modo a proporcionar o esboço de um cenário composto pelas vertentes ou paradigmas que compuseram a Geometria. Utilizou-se para tal o desenvolvimento histórico da Matemática, mais especificamente da Geometria, ao longo das civilizações, inter-relacionando-as com a Geometria da Tartaruga, subjacente ao Sistema Computacional Logo (Papert, 1985 e Reggini, 1985), na forma bidimensional para a exploração da Geometria Plana e tridimensional para a exploração da Geometria Espacial, resgatando-se, assim, o papel de destaque que a Geometria ocupou nos primórdios das civilizações na história da Matemática e que, por vários aspectos, vem sendo relegada a segundo plano no contexto educacional.

Esse cenário, constituiu-se no corpo teórico da pesquisa, propiciando diretrizes básicas para a construção e elaboração de uma metodologia alternativa baseada em Logo e em Resolução de Problemas, apoiada na nossa concepção teórica embasada na História da Matemática, mais especificamente, na História da Geometria e também na Teoria do Desenvolvimento Cognitivo de Jean Piaget, segundo a complementaridade da Epistemologia e da Psicologia Genéticas.

Nossa proposta metodológica alternativa foi implementada em dois Estudos de Caso, com enfoque qualitativo, no qual foram ressaltados os processos mentais e computacionais, ou seja,

¹ Estas reflexões fazem parte da Dissertação de Mestrado da autora.

* Núcleo de Informática Aplicada à Educação - NIED - UNICAMP

foram analisadas e interpretadas as dimensões funcionais do dinamismo microgenético das condutas cognitivas de dois usuários de Logo, explorando as Geometrias Plana e Espacial no cenário citado anteriormente, em situações reais de Resolução de Problemas. Nessa implementação, pretendeu-se na nossa pesquisa, investigar o seguinte problema:

É possível resgatar ou captar algumas abordagens do Desenvolvimento Histórico da Geometria através do ambiente Logo?

Em uma dimensão mais ampla, o objetivo de nossa pesquisa foi buscar estratégias de soluções viáveis, porém não imediatistas, para o processo ensino-aprendizagem da Matemática e, conseqüentemente, da Geometria, no sentido de que propiciem a transformação da estrutura social vigente, transcendendo e ultrapassando os grandes desafios a que a Educação Brasileira vem sendo submetida no sistema atual de ensino.

ABSTRACT

This research analyses Plane and Space Geometry in Mathematics Education, in a historical-critical approach, so as to provide the outline of a scenario composed by the directions or paradigms which set up Geometry. In order to achieve that, the historical development of Mathematics is used, more specifically of Geometry, throughout civilizations; both Mathematics and Geometry are interrelated with the Turtle's Geometry which underlies the Logo Computation System (Papert, 1985 and Ruggini, 1985); used in its bidimensional form to survey the Plane Geometry and in its tridimensional form to survey the Space Geometry, thus redeeming the important role Geometry has played since the beginning of civilizations in the history of Mathematics, and which, for various reasons, has been down-played in the educational context.

This scenario, which will make up the theoretical basis for this research, will set the guidelines for the construction and elaboration of an alternative methodology based on Logo and on Problem Solving. This methodology is supported by our theoretical notion which is based on the History of Mathematics, more specifically on the History of Geometry and also on the Theory of the Cognitive Development of Jean Piaget, according to the complementary aspects of the Genetic Epistemology and Genetic Psychology.

Our alternative methodological proposal will be implemented in a Case Study with a qualitative approach, whereby the mental and computation processes will be pointed out, that is, the functional dimensions of the micro genetic dynamism of the cognitive behavior of two Logo users will be analysed and interpreted, by exploring the Plane and Space Geometry in the previously cited scenario, in real Problem Solving situations. In this implementation, we intend to give an answer to the following problem:

Is it possible to redeem or capture some approaches of the Historical Development of Geometry, through the Logo environment?

In a broader dimension, the purpose of this research will be to search strategies for viable, though not immediate, solutions for the teaching/learning process of Mathematics and, consequently, of Geometry, so as to favor the transformation of the prevailing social structure, transcending and surpassing the great challenges to which Education in Brazil has been submitted to in the present educational system.

Organização da Pesquisa

Com o objetivo de elucidar o leitor a respeito de nossa pesquisa, apresentamos nesse momento a sua organização:

Em um primeiro momento de nossa pesquisa foi caracterizada a Educação em geral e a Educação Brasileira de uma maneira abrangente, em uma perspectiva político-social, a partir de uma visão histórico-crítica, ressaltando o avanço tecnológico do país, com o objetivo de contextualizar a introdução de computadores no Ensino da Matemática e suas implicações pedagógicas em nossa sociedade que, a cada dia, se torna mais informatizada.

Mais especificamente, foram tratados alguns aspectos relativos a reflexões sobre o estatuto contemporâneo da Matemática, do Ensino da Matemática, e do Ensino da Geometria, inseridos na análise histórico-crítica do sistema geral da Educação Brasileira, com o objetivo de nos situarmos, tanto histórica quanto construtivamente, nesse contexto, como educadores matemáticos.

Para tanto, foi explicitada a fundamentação teórica da dissertação através da complementaridade da Epistemologia Genética e da Psicologia Genética da Teoria do Desenvolvimento de Jean Piaget, segundo as abordagens Macrogenética e Microgenética das condutas cognitivas, subsídios teórico-metodológicos para nossa descrição da análise cognitiva e computacional relativa aos dois Estudos de Caso. Foram ainda delineadas reflexões sobre a analogia estabelecida entre a História da Matemática e o Ensino da Matemática, com o objetivo de esclarecer a utilização da História, como um recurso pedagógico adicional para o Ensino da Matemática.

Nesse cenário, com o objetivo de contextualizar historicamente a Geometria da Tartaruga inerente à Linguagem Computacional Logo, foram enfocados alguns aspectos do desenvolvimento histórico da Geometria, ressaltando as duas vertentes ou paradigmas: forma ou abordagem e conteúdo que compuseram esse desenvolvimento, dando ênfase às diferentes

formas ou abordagens que a Geometria sofreu em alguns momentos, ao longo de sua evolução histórica.

Decorrente da contextualização acima delineada, foram abordadas a história e a filosofia da Linguagem Computacional Logo, inserindo a Geometria da Tartaruga (Papert, S.; 1980) e inter-relacionando-a com algumas formas de abordagens da Geometria. Foi abordada ainda, a Metodologia Logo, subjacente à Linguagem Computacional Logo nas suas formas bidimensional e tridimensional.

Em um outro momento, foi caracterizada sob vários aspectos uma proposta de ambientes informatizados, que constituiu um cenário propício para a exploração da Geometria Plana e Espacial, com objetivo de viabilizar a implementação da proposta metodológica alternativa desenvolvida nesta pesquisa.

A viabilização da implementação dessa proposta metodológica alternativa, se processou em dois momentos distintos. Em um primeiro momento, foi apresentada a descrição de um Estudo de Caso, com um enfoque qualitativo, com um usuário explorando a Geometria Plana através do Logo Bidimensional, resolvendo um problema matemático específico – Teorema de Pitágoras, em três paradigmas distintos: Paradigma Tradicional, Paradigma Intuitivo, e Paradigma Alternativo (Logo). Em um segundo momento, essa implementação foi descrita através da exploração do cenário do Logo Tridimensional e suas potencialidades, e também através de um Estudo de Caso, onde foram analisados os processos mentais e computacionais inerentes às situações-problema desenvolvidas pelo sujeito pesquisado, com a finalidade de elucidar e exemplificar o processo de construção de conceitos geométricos relativos à Geometria Espacial.

Finalmente, foram delineadas algumas inferências, ou mesmo considerações de ordem metodológica, a partir dos dois Estudos de Caso realizados, e das reflexões teóricas de nossa pesquisa, o que possibilitará aos pesquisadores da área repensar sobre sua prática educativa, visando a um possível redimensionamento no processo Ensino/Aprendizagem da Matemática, e mais especificamente da Geometria.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DA PESQUISA

Estudos sobre o modo como o conhecimento evolui baseados na teoria de Piaget e em contribuições recentes de seus colaboradores constituem o substrato teórico da pesquisa, ressaltando a complementaridade entre a Epistemologia Genética e a Psicologia Genética; mais especificamente, foram abordados alguns aspectos relacionados à Macrogênese e à Microgênese do desenvolvimento cognitivo.

A Epistemologia Genética de Jean Piaget tem, por objetivo, estudar como o conhecimento passa de um *estado de validade* inferior para um outro maior, superior. A Psicologia Genética, por sua vez, tem como fim o estudo da passagem de um *estado de equilíbrio* inferior a um superior.

Hoje, as contribuições da Cibernética e da Inteligência Artificial, entre outros fatores, propiciaram o estabelecimento de relações entre a Epistemologia e a Psicologia Genéticas, constituindo o que modernamente a escola de Genebra entende como Construtivismo Epistemológico e Construtivismo Psicológico.

Uma fecunda cooperação entre essas duas disciplinas iniciou-se através das ligações entre os últimos trabalhos de Piaget sobre as investigações psicológicas do sujeito cognoscente e os estudos desenvolvidos por Minsky, Papert, Cellier e Inhelder (Cellier, 1992).

De fato, a Escola de Genebra propõe-se atualmente a investigar o Construtivismo Psicológico, isto é os procedimentos em jogo na Resolução de Problemas particulares, ou seja, a funcionalidade da inteligência, mais do que a análise estrutural, geral do pensamento, que constitui o Construtivismo Epistemológico.

O Construtivismo Psicológico resgata os primeiros estudos de Piaget sobre a linguagem e pensamento da criança e sobre a inteligência sensório-motora, em que este autor apresenta uma psicologia do funcionamento da inteligência. Ao mesmo tempo, essa linha de investigação

enriquece os primeiros trabalhos de Piaget com processos psicológicos mais complexos, que dizem respeito à elaboração de procedimentos e à representação semiótica.

A Inteligência Artificial e os estudos sobre os processos de Resolução de Problemas permitiram uma nova ótica do funcionamento intelectual, que visa as condutas do indivíduo, mostrando como este reorganiza seus objetivos para chegar a realizar suas tarefas. Centram-se pois, sobre o caráter temporal das condutas do sujeito psicológico e constituem as chamadas Microgêneses Cognitivas. Tal abordagem estuda e descreve os procedimentos do sujeito idiossincrático, cuja elaboração se efetua em contextos práticos e comuns, em uma escala temporal, destacando a interação entre o sujeito e o objeto e analisando em detalhes as condutas cognitivas, ou seja, os encadeamentos, os cortes de ações, a atribuição de significação às tarefas, as escolhas dos instrumentos de conhecimentos postos em ação e o controle e a pertinência das ações aos fins a que se propõe o sujeito.

A construção microgenética constitui um campo conceitual próprio para o estudo do funcionamento cognitivo, em período de conflitos, de transição, onde se verifica a abertura para "novos possíveis" e o predomínio das Acomodações (Diferenciações) sobre as Assimilações (Generalizações).

A pesquisa microgenética procura compreender como o sujeito controla informações que retira diretamente de suas ações, dos objetos e das relações entre ambos. Trata-se também das descrições que o sujeito faz ao atribuir significados. Destaca a influência das significações na representação das ações do sujeito, das suas relações com o objeto, em situação de Resolução de Problemas.

Os aspectos da atividade cognitiva privilegiados na perspectiva microgenética de análise são aqueles que permitem estudar o sujeito cognoscente em suas intenções, valores e heurísticas. Possui igualmente uma dimensão teleonômica, que diz respeito aos objetivos, fins, propósitos do sujeito ao agir, e uma Axiologia, ou seja, uma dimensão relacionada às avaliações, aos valores que o sujeito atribui às suas próprias ações, com vistas a atingir objetivos determinados.

As heurísticas por sua vez são estratégias que o sujeito compõe, norteadas pelos seus objetivos, fins determinados e valores, levando em conta o que lhe é significativo, recuperando, dessa forma, a sua subjetividade no processo de redescoberta e busca em situações conflitantes. O diagrama a seguir ilustra a interpretação entre as dimensões funcionais do dinamismo microgenético.

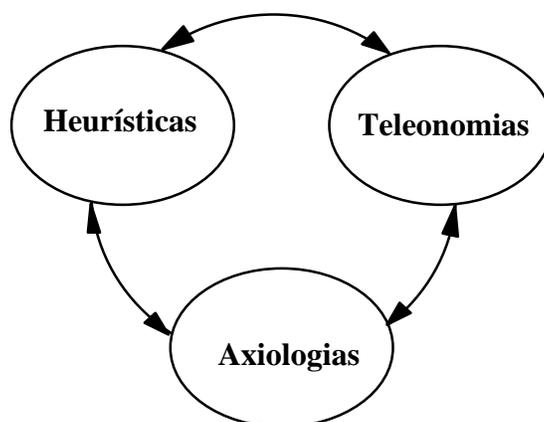


Figura 1 - Dinamismo microgenético das condutas cognitivas

Finalmente a pesquisa microgenética ou funcional relaciona-se ao sujeito psicológico, mas reconhece igualmente o sujeito epistêmico. Decerto, o conhecimento normativo é próprio do sujeito epistêmico e o conhecimento pragmático ou empírico é próprio do sujeito psicológico. Esses dois tipos diferentes de conhecimento se complementam ao se analisar a compreensão do sujeito cognoscente, quando concebido como construtor ativo do conhecimento.

METODOLOGIA DA PESQUISA

Na pesquisa foram realizados dois Estudos de Caso, em uma metodologia de Resolução de Problemas, nos quais foi ressaltado o dinamismo microgenético das condutas cognitivas de dois usuários interagindo com o ambiente Logo, em um processo dinâmico de resolução de problemas práticos.

Foi realizada uma análise dos dois Estudos de Caso cuja descrição, no primeiro estudo, enfocou os dados recolhidos durante as sessões do último semestre de 1992, no qual o aluno trabalhou uma sessão por semana, com duração de três horas cada, perfazendo um total de aproximadamente 60 horas de trabalho. No segundo estudo foram considerados os processos cognitivos e computacionais referentes aos dados recolhidos durante as sessões do ano de 1991, no qual o aluno trabalhou uma sessão por semana, com duração de três horas cada, perfazendo um total de aproximadamente cem horas de trabalho.

A análise do primeiro estudo referiu-se aos processos cognitivos e computacionais do sujeito, resolvendo um dado problema matemático específico: a Relação de Pitágoras em três paradigmas distintos: Paradigma Tradicional, Paradigma Intuitivo e Paradigma Alternativo (Logo). A análise relativa ao segundo estudo processou-se a partir de algumas situações-problema desenvolvidas pelo sujeito pesquisado, que na nossa concepção, constituíram-se como as mais elucidativas e fundamentais para os objetivos a que nos propusemos a investigar.

As análises processaram-se através do enfoque microgenético da atividade cognitiva, a partir da qual, procedimentos metodológicos se fizeram presentes. Foram feitas gravações com fita cassete, com o objetivo de processar uma análise através da transcrição das atividades dos sujeitos e os respectivos processos de raciocínio descrevendo as suas condutas, e ressaltando suas heurísticas em contextos distintos ao resolver os problemas propostos. Esse procedimento metodológico possibilitou retomar a ação do sujeito em vários momentos, propiciando dessa forma a depuração e reestruturação da análise dos dados.

Depoimentos dos sujeitos, diálogos e comentários também foram considerados, principalmente quando se tratava de explicitações das estratégias utilizadas por eles ao resolver as situações-problema. Utilizaram-se também nesse estudo: a leitura, a análise e a descrição dos arquivos dos procedimentos elaborados pelos sujeitos e gravados em disquetes, para recuperar momentos da interação destes com o computador.

Atividades extra-computador também foram desenvolvidas tais como: resolução do problema proposto no Paradigma Tradicional em que foram utilizados os métodos convencionais; resolução do problema proposto no Paradigma Intuitivo, em que se utilizou material concreto, como lápis, lápis colorido, papel e cartolina.

Finalmente no Paradigma Alternativo, ou seja, com a Geometria da Tartaruga a resolução do problema se processou a partir do momento em que os sujeitos precisaram reelaborar seus conhecimentos anteriores e adaptá-los ao novo sistema de representação.

O planejamento e reestruturação de cada sessão processaram-se após análise, depuração e descrição das atividades realizadas e, para tanto, foram consideradas as intervenções do pesquisador nos diferentes momentos do nosso estudo. As modificações que os sujeitos fizeram ao programar foram decorrentes dos processos mentais pelos quais elas se efetivaram.

Esta análise efetuou-se através dos processos cognitivos e computacionais dos sujeitos mencionados, em situações práticas de resolução de problemas. Os referidos processos foram considerados à luz da Análise Microgenética do comportamento cognitivo, isto é, aquela que diz respeito aos aspectos funcionais da adaptação do sujeito ao real.

Em outras palavras, trata-se de uma análise que se refere à pertinência dos conhecimentos em um dado contexto, em que serão levados em conta os sistemas axiológicos do sujeito, ou seja, os valores, a importância que ele atribui às suas estratégias, a criação das heurísticas no processo de investigação, busca e descoberta para resolver problemas geométricos em ambientes informatizados ou não.

Mas o que é uma heurística? Heurística é o método analítico para descobrir-se a verdade científica. Os aspectos teleonômicos, também fundamentais na análise microgenética, constituem os fins, as intenções, os objetivos que o sujeito possui, ao percorrer um determinado caminho, ao investigar uma heurística, por meio de estratégias, ao tentar solucionar o problema proposto.

Foi traçada, na pesquisa, uma relação dialógica entre a descrição dos processos de resolução de problemas e os componentes funcionais dos processos mentais dos sujeitos, diante de uma situação-problema nos três paradigmas distintos.

ASPECTOS RELATIVOS AOS ESTUDOS DE CASO

Alguns pressupostos ou mesmo considerações de ordem metodológicas poderiam ser delineadas a partir da pesquisa, através dos dois Estudos de Caso, realizados na sua parte prática. Na nossa concepção, tanto Análise Microgenética quanto os Ambientes Informatizados são providos de recursos importantes e necessários à compreensão do processo de construção de noções geométricas.

Em ambientes onde o computador se faz presente, no caso específico no Ambiente Logo, sentimos que foi possível resgatar os processos cognitivos do sujeito, pela descrição de sua programação e também pela constituição das diferentes estratégias e heurísticas utilizadas por ele ao adaptar seus conhecimentos anteriores no processo de Resolução de Problemas a diferentes contextos.

Na proposta metodológica alternativa, que consistiu em trabalhar com conceitos geométricos em ambientes informatizados, através de Resolução de Problemas, pôde-se constatar por meio da análise das dimensões funcionais do dinamismo microgenético das condutas cognitivas dos dois sujeitos dos Estudos de Caso, um explorando conceitos da Geometria Plana, por meio do Logo Bidimensional, e o outro explorando conceitos da Geometria Espacial através do Logo Tridimensional, nos diferentes momentos da descrição dessa análise, a inter-relação da Geometria da Tartaruga com as diversas formas de abordagens da Geometria, tais como: Geometria Intuitiva, Geometria Euclidiana, Geometria Analítica, Geometria Espacial.

1º Estudo de Caso

A inter-relação delineada acima, foi sentida no primeiro Estudo de Caso, da pesquisa, quando o pesquisador colocou a seguinte questão para o sujeito: Como você mostraria que existe a Relação ou o Teorema de Pitágoras em triângulos retângulos?

A resolução dessa situação-problema processou-se em três paradigmas distintos: Paradigma Tradicional, Paradigma Intuitivo, e Paradigma Alternativo (Geometria da Tartaruga).

Em um primeiro momento, no Paradigma Tradicional, o sujeito pesquisado apenas reproduziu o que “aprendeu” sobre a Relação de Pitágoras na escola, no paradigma tradicional.

Para ilustrar essa afirmação disse:

"Eu decorava, não entendia direito, agora no 2º colegial, é que eu "entendi", pois a professora foi demonstrando na lousa uma por uma, as relações métricas do Triângulo Retângulo ABC."

Esse entendimento, contudo, não parece significar uma compreensão do teorema, pois, caso contrário, o sujeito teria se comportado de outra maneira, isto é, teria uma estratégia original, própria daqueles que dominam uma noção em sua plenitude. O comportamento do sujeito sugere que é possível que ele não seja capaz de aplicar o conceito envolvido no Teorema de Pitágoras, em outros contextos, como por exemplo, utilizando a Geometria da Tartaruga, ou mesmo aplicar o Teorema utilizando material concreto.

Em uma palavra, será realmente que o sujeito construiu a Relação de Pitágoras? De fato, a construção de uma noção do ponto de vista microgenético implica a elaboração de estratégias próprias, utilizando conhecimentos anteriores, advindos de outros contextos, aplicados a situações novas.

Além disso, investiga como o sujeito avalia suas ações e as informações de que dispõe para atingir os fins, os objetivos a que se propõe. No caso, o sujeito de nossa pesquisa, procurou atingir a Relação de Pitágoras, usando a heurística dos Casos de Semelhança de Triângulos.

O fato de o sujeito estar todo o tempo utilizando a maneira de resolver o problema como foi demonstrado pela sua professora sugere-nos que não há um controle do sujeito sobre seu procedimento, ou seja, uma avaliação de cada um dos passos pelos quais seqüencia ou concatena seu raciocínio e conseqüentemente os fins a que se propõe não parecem estar presentes ao seu espírito, enquanto descreve as **relações métricas do triângulo retângulo**. Poderíamos inferir que esses fins seriam estritamente chegar a fórmulas e algoritmos, ou seja, os fins, os objetivos foram algoritmizados pelo sujeito.

Em tal **Paradigma Tradicional**, transparecem claramente conceitos de **Geometria Euclidiana** implícitos no processo de resolução da Relação de Pitágoras pelo sujeito.

Nesse momento da interação, o experimentador lança então uma nova solicitação: Seria possível "demonstrar" o Teorema de Pitágoras **sem fórmulas e algoritmos**?

Em um segundo momento de nossa pesquisa, no processo de resolução do Teorema de Pitágoras, no Paradigma Intuitivo, quando o pesquisador fez a solicitação acima, incitou o sujeito a criar uma outra maneira de explicar a Relação de Pitágoras, que não pela maneira tradicional, e desafiou o sujeito a utilizar ou a criar uma estratégia, se não própria, pelo menos mais significativa para ele, para tal fim.

O sujeito, então, organizou uma situação, a qual é mostrada e explicitada na Figura 2 abaixo:

"Dado o Triângulo Retângulo ABC, vou formar com os seus lados os seguintes Quadrados: A, B e C e depois minha intenção é quadricular esses quadrados."

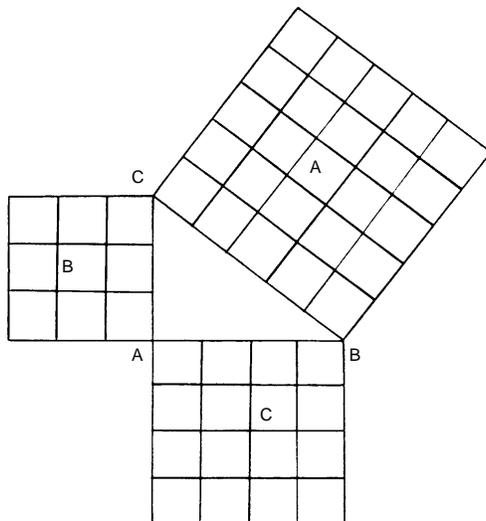


Figura 2 - Triângulo retângulo e os quadrados de seus lados quadriculados construído pelo sujeito

Como o conceito matemático aqui envolvido é **área de figuras planas**, no caso, área do quadrado, o sujeito não usou o algoritmo prontamente, ou seja, $A = a \times a = a^2$, como fez no primeiro momento, no Paradigma Tradicional, mas valorizou uma estratégia intuitiva para calcular a área empírica e concretamente do Quadrado A. E a todo momento, no decorrer do processo, perseguiu seu objetivo, sua intenção, que era calcular a área do Quadrado A.

Depois desse momento, generalizou a estratégia acima para os quadrados de lados b e c, ou seja, estabeleceu realmente a **heurística** para o **Cálculo da Área**; então concluiu que no Quadrado C cabem 9 unidades de área e no Quadrado B, cabem 16 unidades de área. A estratégia utilizada pelo sujeito concretizou a sua heurística.

Finalmente o sujeito fez a seguinte dedução, utilizando o raciocínio intuitivo:

"Se o Quadrado A possui 25 quadradinhos, o Quadrado B possui 16 quadradinhos e o Quadrado C possui 9 quadradinhos então posso dizer que: o número dos quadradinhos do Quadrado A é igual ao número de quadradinhos do Quadrado B mais o número de quadradinhos do Quadrado C."

Essa afirmação em linguagem matemática, traduziu-se por:

$$9 + 16 = 25$$

$$9 \square + 16 \square = 25 \square$$

$$\text{Área } QC + \text{Área } QB = \text{Área do } QA \text{ (} Q = \text{quadrado)}$$

Sendo que os lados dos Quadrados A, B e C, são respectivamente a, b, c, nesse caso, temos: $3^2 + 4^2 = 5^2$ e $c^2 + b^2 = a^2$ que expressa a Relação de Pitágoras.

Embora o sujeito tenha utilizado nessa resolução uma estratégia própria, com seus significados, pode-se observar que durante a investigação e busca para concluir seu problema, o sujeito exercia um certo controle sobre como utilizar de maneira propícia o conceito de Área, e o transpôs ao novo desafio, que era demonstrar a relação matemática que caracterizava o Teorema de Pitágoras.

Enfim, nessa heurística usada pelo sujeito, em que ele utilizou no processo de resolução do problema os raciocínios intuitivo, dedutivo e indutivo, nota-se claramente a *relação entre Geometria Intuitiva e a Geometria Euclidiana*.

A **Geometria Intuitiva** foi usada quando o sujeito sobrepõe a unidade de Área, que é o *quadrado* nos quadrados maiores A, B, e C, e empiricamente mostra que essa unidade de medida cabe "tantas vezes" em cada quadrado formado pelos lados do Triângulo Retângulo ABC.

A **Geometria Euclidiana** foi usada quando, ao quadricular o quadrado formado pelos lados do triângulo ABC, o sujeito toma um quadrado como unidade de medida. Implicitamente está usando o conceito de área de um quadrado, ou seja:

$$\text{Área} = \text{lado} \times \text{lado} = a \times a = a^2$$

Em um outro momento desse Estudo de Caso, o experimentador incitou o sujeito a utilizar o **contexto Logo**, ao colocar o seguinte desafio: Com a **Geometria da Tartaruga** você acha possível "demonstrar" a **Relação de Pitágoras**?

Nessa descrição da análise microgenética já se faz presente o terceiro momento dessa interação em que se enfoca o Paradigma Alternativo.

O sujeito, então, começa a interagir com um novo sistema de representação que é o **sistema Logo**, com a **Geometria da Tartaruga** e suas especificidades. Para tanto, em um primeiro passo tenta desenhar um Triângulo Retângulo ABC na tela, com os comandos e primitivas da Linguagem Logo, como ilustrado na Figura 3 a seguir.

```
?ap triret
aprenda triret
pf 80
un pt 80
pd 90
ul pf 60
fim

triret aprendido
?triret imprima
```

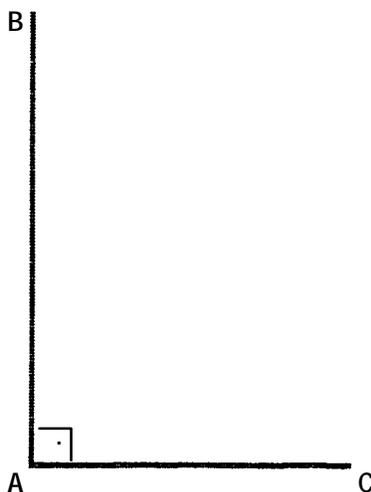


Figura 3 - Tentativa de construção de triângulo retângulo com o programa **triret**

Nota-se que o sujeito nos outros dois contextos anteriores, quais sejam, no Paradigma Tradicional e no Intuitivo, "deu conta" de seus respectivos sistemas de representações e soube finalizar sua tarefa. E no contexto Logo, em que o sistema de representação já lhe é familiar, por que surgem certos conflitos?

Constata-se que o sujeito soube trabalhar bem com os algoritmos como está acostumado a fazer na escola, mas, apesar disso, apresenta um conflito, isto é, não consegue saber qual é o ângulo que a tartaruga deve virar para unir os dois extremos das semi-retas que formarão o triângulo. Pode-se inferir que, apesar de o sujeito saber o que é o Teorema de Pitágoras, está sentido dificuldade em generalizar para um novo contexto esse conhecimento e suas particularidades, ou seja, sua representação pois, o seu conhecimento a respeito dele não é suficiente para a sua compreensão efetiva.

O sujeito, depois de tentar várias outras alternativas para o valor do ângulo da tartaruga, chega ao fato de que não consegue construir o triângulo retângulo sem saber a medida do ângulo, isso se o triângulo não for isósceles (2 lados iguais e 2 ângulos iguais).

A partir disso, decidiu reestruturar a sua primeira estratégia, controlando-a de modo que lhe fosse possível atingir o fim mais imediato, que seria representar o triângulo retângulo na tela do computador.

Desde que o sujeito começou a interagir com esse outro sistema de representação, ou seja, o **contexto Logo**, nota-se, pelos procedimentos utilizados por ele, que a sua estratégia usada foi desenhar um ângulo reto, partindo de seu conhecimento anterior a respeito do conceito de triângulo retângulo, segundo o qual todo triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo reto, independente das medidas dos catetos. Tentando transpor e adaptar seu conhecimento anterior para o "novo contexto", usou o comando **mudepos**, primitiva da linguagem computacional Logo, explorando os recursos da **Geometria da Tartaruga**, como ilustrado a seguir.

```
?ap tpt
aprenda tpt
mudepos [ 0 -40 ]
```

```

mudepos [ 30 -40 ]
mudepos [ 0 0 ]
fim

```

```

tpt aprendido
?tpt imprima

```

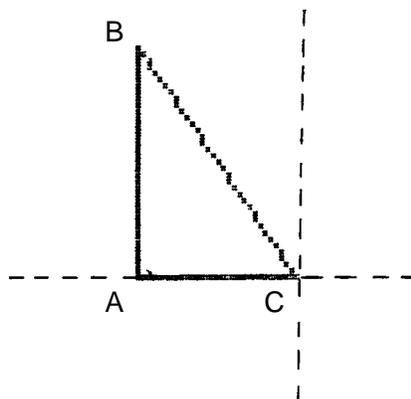


Figura 4 - Triângulo retângulo construído com o programa **tpt**

Convém ressaltar que seria diferente, se o sujeito construísse um dos catetos e a hipotenusa primeiramente, pois, dessa maneira, ele teria que necessariamente **conhecer** e *usar* a **Relação de Pitágoras** e portanto não deixaria de estar usando fórmulas e algoritmos. Isso significa que a **Geometria da Tartaruga** propicia um ambiente diferente do ambiente tradicional de aprendizagem, pois possibilita ao sujeito, explorar suas possibilidades, controlando suas estratégias, dando-lhes significação, e não simplesmente usando conhecimentos de uma maneira mecânica.

O sujeito encontrou, então, no **sistema Logo** recursos para "vencer" ou contornar seu conflito, cumprindo seu objetivo imediato que era representar na tela do computador o Triângulo Retângulo (Miskulin, 1994).

Implícito nas estratégias escolhidas pelo sujeito nos procedimentos relativos a resolução do problema, nota-se uma verdadeira heurística, no sentido de que ele buscou seus próprios caminhos para mostrar a Relação de Pitágoras.

Valorizou primeiramente a estratégia que lhe possibilitou pintar, de uma cor específica o quadrado formado pelo cateto menor do triângulo ABC. Em seguida, ele dividiu o quadrado

formado pelo lado do cateto maior em quatro retângulos iguais dois-a-dois, pintando cada um dos quatro retângulos resultantes, com cores diferentes. A estratégia explicitada pela divisão e determinação das cores específicas, nos leva a inferir que o sujeito transpôs a estratégia utilizada no Paradigma Intuitivo.

Em seguida, delimitou os quadrados formados pelos catetos do triângulo ABC, usando figuras convenientes de forma tal que, compondo essas figuras ele formaria um quadrado igual àquele formado pela hipotenusa.

Inerente à estratégia utilizada (análoga à manipulação de um quebra-cabeça) nota-se uma intencionalidade e valorização do sujeito, no sentido de "transportar" as figuras, segundo os **recursos** de **pintura** disponíveis no Logo, para o quadrado formado pela hipotenusa do triângulo ABC.

Ao proceder dessa maneira, transpõe as figuras delimitadas por cores específicas para o quadrado formado pela hipotenusa do triângulo ABC, isto é transporta-as através dos comandos, ou seja, por meio de primitivas selecionadas pelo sujeito, inerentes à Geometria da Tartaruga, utilizando conceitos inerentes à Geometria das Transformações (reflexão, rotação e translação). Desse modo, nota-se nesse contexto a inter-relação da **Geometria da Tartaruga** com a **Geometria das Transformações** (Figura 5, com os programas computacionais em anexo).

constatou-se também as inter-relações da **Geometria da Tartaruga** com as **Geometrias: Intuitiva, Euclidiana, Analítica e das Transformações**.

Observa-se claramente que, implícitos nas estratégias usadas pelo sujeito, temos conceitos de **Geometria Analítica**, como **distância entre dois pontos** e **distância de um ponto a uma reta**, entre outros; encontram-se também conceitos da **Geometria das Transformações**, como movimentos de **Rotação, Translação e Reflexão** no plano.

Enfim, vê-se claramente nos procedimentos do sujeito ao resolver o problema proposto no paradigma alternativo, a inter-relação das **Geometrias da Tartaruga, Euclidiana, Analítica**, e das **Transformações** pois a arquitetura matemática subjacente à Linguagem Computacional Logo e implícita no micromundo da tartaruga propicia um ambiente poderoso para que a interação do sujeito se processe através desse trânsito entre as diversas Geometrias.

Ao resolver o problema, o sujeito compõe as heurísticas e utiliza estratégias distintas para aplicar essas heurísticas em vários contextos. Esse fato é constatado quando o sujeito muda o estilo de programação, isto é, "transita" do Modo Direto² para o Modo de Edição³ e vice-versa. Tal atitude também se constitui, ao nosso ver, em uma nova estratégia, uma real **heurística**, para o sujeito ser capaz de processar uma depuração imediata e contínua, característica intrínseca do **Sistema Logo**, que possibilita a **depuração** e a **reestruturação** do programa computacional, sempre que for preciso.

Deve-se ressaltar que é a partir da depuração, da análise dos procedimentos, que o sujeito é capaz de "pensar sobre seu modo de pensar", ou seja, de "rever" seu raciocínio implícito na descrição de sua programação em cada passo do processo de resolução. A reestruturação de seu programa é consequência de sua própria reestruturação mental.

² Modo Direto: Modo de trabalho, onde os comandos são executados logo após o usuário ter digitado o comando e ter apertado a tecla Enter. Caracteriza-se pela presença do sinal "prompt" (?), que indica que os comandos serão executados imediatamente.

³Modo Edição: Modo de trabalho, onde o usuário define um procedimento. Caracteriza-se pela ausência do sinal "prompt" (?), indicando que os comandos não serão executados imediatamente. Os comandos ficarão armazenados na memória do computador.

Nesse processo, convém assinalar que os **possíveis erros** são fontes de novos caminhos, novas decisões, e portanto, representam uma importante **metáfora** na descrição da análise das condutas cognitivas do sujeito, no **contexto Ensino/Aprendizagem de conceitos geométricos**.

O micromundo da tartaruga propicia ao sujeito um ambiente de aprendizagem, no qual pouco a pouco, explorando os comandos básicos da Linguagem Computacional Logo, passa a exercer "controle" sobre suas próprias estratégias de resolver o problema. Isso se evidencia por exemplo, quando o sujeito faz correspondências, analogias ao criar um procedimento novo, ou mesmo, escolhe um simples comando para explicitar parcialmente sua estratégia.

Desse modo, pode-se inferir que as palavras de Harold Abelson e Andrea diSessa (1981) expressam o significado da Geometria da Tartaruga, no contexto Ensino/Aprendizagem de Geometria, qual seja: *"A Geometria da Tartaruga é uma Matemática arquitetada para propiciar um aprendizado por tentativas e exploração e não uma Matemática que apresenta seus Teoremas e suas Provas."* (p.3) (tradução da autora da pesquisa).

Partindo desse princípio, pode-se inferir que o sujeito, ao demonstrar o Teorema de Pitágoras no Paradigma Tradicional, não "construiu" conceitos geométricos novos, somente reproduziu o que lhe foi transmitido. Entretanto, no Paradigma Alternativo, utilizando-se da Geometria da Tartaruga, encontrou um contexto propício ao desenvolvimento de noções geométricas. Esse fato verificou-se em vários momentos dessa interação, quando o sujeito explorou os recursos que esse outro sistema de representação lhe oferecia, ao tentar adequar o problema ao novo contexto, isto é, ao combinar suas ações, ao criar novos procedimentos, controlando suas estratégias para finalmente atingir seu propósito: representação na tela e a "demonstração" com a Geometria da Tartaruga do Teorema de Pitágoras.

Nos três momentos da resolução do problema, pelo sujeito, os aspectos da atividade cognitiva privilegiados, segundo a perspectiva microgenética, nos possibilitaram constatar o dinamismo microgenético das condutas cognitivas do sujeito em situação prática, isto é, foi-nos possível estudar o sujeito cognoscente em suas intenções, valores e heurísticas.

A dimensão teleonômica, por sua vez, diz respeito aos objetivos, fins, propósitos do sujeito ao agir no processo de resolução de problemas, enquanto que a Axiologia refere-se às avaliações, aos valores que o sujeito atribui às suas próprias ações, redimensionando suas estratégias, com vistas a atingir objetivos determinados. Trata-se, pois, da descrição que o sujeito faz ao atribuir significados, valores e intenções às suas estratégias no processo de resolução do problema proposto.

Assim sendo, no primeiro recorte desse estudo (**Paradigma Tradicional**), constatou-se a existência de uma heurística, constituída pelo sujeito já que foi utilizado um método analítico para chegar-se a uma solução. Porém esse fato não implicou em um comportamento de adaptação à realidade em que o sujeito teve que adaptar seus conhecimentos, construir uma solução própria. Esse fato mostra-nos que a acomodação e a assimilação estão equilibradas. Embora a solução tenha sido satisfatória e mesmo correta, foi resultante de um processo mecânico de resolução de problema, em que o sujeito utilizou como estratégia fórmulas e algoritmos e "reproduziu" o que havia "vivenciado" na escola. Isso mostra que não houve adaptação do conhecimento e sim sua reprodução.

Porém, no segundo recorte (**Paradigma Intuitivo**), o sujeito já necessitou de formas de modificação e reestruturação de seu conhecimento pré-existente sobre o Teorema de Pitágoras para adaptar esse conhecimento no sistema diferente de representação que lhe foi apresentado. Este fato, demonstrou a ênfase na acomodação, mais do que na assimilação.

E finalmente no terceiro recorte, onde o sujeito trabalhou no **Paradigma Alternativo**, notou-se a prevalência maior da acomodação à assimilação, pois o sujeito necessitou fazer (n) diferenciações para chegar à generalização (assimilação). Isso implica não em reprodução de um conhecimento, mas na sua transformação e, portanto, na sua compreensão. Parafraseando Jean Piaget: "**Compreender é transformar e reinventar o conhecimento**".

Um outro aspecto que pode ser abordado neste primeiro Estudo de Caso, refere-se à uma conclusão que pôde ser constatada no processo de exploração de conceitos da Geometria Plana com o Logo Bidimensional. Consistiu-se na integração de resolução de problemas com situações encontradas na natureza, fato constatado quando o sujeito representou o problema das abelhas européias, ou seja, quando representou a construção do favo do mel das abelhas. Nesse problema, os conceitos matemáticos inerentes, entre outros, são: ladrilhamento com polígonos regulares e **maximização de áreas de figuras planas**, tópico tratado no desenvolvimento do **Cálculo Diferencial** (para maiores detalhes ver Miskulin, 1994). Mais uma vez constatou-se conceitos matemáticos ainda não vivenciados pelo sujeito no contexto escolar, mostrando-nos como os diversos tópicos da Matemática são trabalhados, de um modo geral, desarticulados entre si e, mais ainda, da realidade que cerca os nossos alunos. Faz-se necessário, pois, redimensionarmos nossos métodos de ensino, procurando integrá-los ao avanço tecnológico que se faz presente em nossa sociedade, propiciando aos nossos alunos vivenciar contextos educativos com vistas a possibilitar-lhes uma aprendizagem efetiva e sua plena integração na sociedade.

Dessa forma, constatou-se que a **questão central** que permeou toda a parte teórica e a parte prática da nossa pesquisa foi respondida, ou seja, **foi-nos possível resgatar ou captar algumas formas de abordagens do desenvolvimento histórico da Geometria através do ambiente Logo**.

O contexto Logo propiciou-nos subsídios teórico-metodológicos para que pudéssemos nos posicionar como pesquisadores, possibilitando-nos uma intervenção ativa com os sujeitos pesquisados, tendo como interlocutor nesse processo a Linguagem Computacional Logo, através da Geometria da Tartaruga que, pela arquitetura matemática em que foi criada, e com sua filosofia subjacente, tornou-se um ambiente educacional poderoso e instigante para a exploração de conceitos geométricos, possibilitando uma aprendizagem construtiva e significativa aos sujeitos.

Convém ressaltar ainda que a atividade de programar no computador e, mais especificamente, no ambiente Logo, deixa transparecer as particularidades dos comportamentos cognitivos do sujeito ao descobrir, criar formas de solucionar seus problemas, e de transpor e

adaptar seus conhecimentos anteriores às novas situações. Desse modo, pode-se concluir que ambientes informatizados, mais especificamente o contexto Logo, propiciam a compreensão do funcionamento cognitivo da construção de conceitos geométricos e, além disso, tornam-se um cenário educacional propício ao desenvolvimento ativo do sujeito na construção de seus próprios conhecimentos.

2º Estudo de Caso

No segundo Estudo de Caso, desta pesquisa, trabalhou-se com um sujeito explorando conceitos de Geometria com o Logo Tridimensional em situações práticas de resolução de problemas. Desse modo, o sujeito da nossa pesquisa, ao representar figuras planas com o Logo Tridimensional, utilizou recursos desse sistema, fazendo analogias e diferenciações com os conhecimentos advindos do contexto Bidimensional, e sentiu que foi preciso transpor este contexto, para realmente conseguir adaptar seus conhecimentos e estratégias ao novo sistema representacional, ou seja, descrever as ações da tartaruga no espaço, com a finalidade de atingir seus objetivos.

Todavia, conflitos cognitivos foram evidenciados no decorrer do estudo com o Logo Tridimensional, a partir da experiência com o Logo Bidimensional; esses aspectos foram trabalhados com o sujeito do Estudo de Caso, a partir da exploração dos comandos básicos da tartaruga tridimensional, em que o modelo referencial que o sujeito tinha do sistema era o contexto bidimensional. Assim sendo, as frases do sujeito pesquisado, abaixo relacionadas, expressam os conflitos cognitivos que surgiram nessa interação:

- *"O que a gente tem imagina tem três dimensões, o que a gente programa tem três dimensões, mas o que a gente vê na tela, não tem três dimensões".*
- *"Quando se faz a figura se está sobre a figura (anda-se sobre a figura, corre-se a mão pela figura). Quando se quer ver a figura temos que nos posicionar em um ponto externo a ela".*

Dessa forma, ao tentar "passar" do Logo Bidimensional para o Tridimensional, entendendo este último como um conjunto de novas primitivas que foram incorporadas ao já conhecido ambiente da Tartaruga, o sujeito de nossa pesquisa, apresentou certas dificuldades. Sua estratégia inicial, foi conhecer as novas primitivas, para incorporá-las aos conhecimentos que ele possuía sobre Logo. A dificuldade começou a partir de então, pois a "exploração" dessas novas "primitivas" tinha como contexto "mental" o Logo Bidimensional. Essa interpretação inadequada é auxiliada pela saída na tela (que continua sendo bidimensional) para movimentos que supostamente ocorriam "no espaço".

Assim sendo, constata-se que o Logo Tridimensional não é uma extensão no sentido de agregar novos comandos à Tartaruga. Ele envolve "repensar" a Tartaruga no espaço. Esse fato, envolve visualizar a Tartaruga no plano como uma restrição para o ambiente da Tartaruga no espaço, e não simplesmente atribuir-lhe novas primitivas.

De acordo com Miskulin e Baranauskas (1991), fato análogo ocorre com o ensino da Geometria nas escolas: a Geometria Plana é ensinada muito antes da Geometria Espacial. Algumas propostas têm sido feitas mais recentemente, em termos de pesquisa, justificando começar-se o estudo da Geometria pelo espaço (pesquisas em desenvolvimento em Educação Matemática, UNESP/Rio Claro). O Logo Tridimensional colabora para a conscientização do espaço em que se vive, possibilitando o "aprender a aprender" sobre o espaço, sem o formalismo da Geometria Espacial (Miskulin e Baranauskas, 1991).

Ainda de acordo com as autoras acima citadas, é muito freqüente, entre novatos que aprendem uma nova linguagem de programação, detectar-se uma preocupação excessiva com o aprendizado de "comandos", confundindo aprender "comandos" com "aprender a escrever algoritmos". Nota-se algo semelhante no que se refere à visão de novas primitivas do Logo Tridimensional como novos "recursos" a serem incorporados aos demais já existentes (Miskulin e Baranauskas, 1991). A tentativa do sujeito de entender os novos "comandos" desvinculados do entendimento do sistema como um **todo (descrição da forma do objeto no espaço mais a sua**

representação em perspectiva), consistiu no conflito entre o que foi descrito (objeto em sua forma concreta) e o que a tela mostra (representação do objeto).

Segundo a teoria Piagetiana, é a partir de conflitos que o sujeito reflete sobre o seu modo de agir, de pensar e de reestruturar seus processos mentais. Tais conflitos é que proporcionarão ao sujeito condições de ultrapassar o Logo Bidimensional e compreender o micromundo do Logo Tridimensional. Dessa forma, cabe a nós professores-educadores repensar nossos métodos estratégicos, tornando-os suficientemente desafiadores e instigantes, a fim de levarmos adiante nossa tarefa.

De acordo com Miskulin e Baranauskas (1991), constata-se que, assim como muitas pessoas acreditam não ter aptidão para a Matemática, encontram-se também pessoas que se dizem "inaptas" para a Geometria Espacial por não conseguirem "enxergar" objetos tridimensionais pelas suas representações em perspectivas. Essa barreira não nos parece muito diferente da "matofobia" (Papert, 1985). Quebrar essa barreira envolve muitas vezes uma mudança na nossa postura de aprendizes. Os sujeitos de nossa pesquisa, progrediram no entendimento sobre o Logo Tridimensional, quando voltaram-se ao concreto. Em outras palavras, os sujeitos voltaram-se ao aspecto figurativo. A presença do objeto tornou-se necessária para poder haver uma reflexão mais complexa, em nível mental. A representação imagética é transformada numa representação gráfica (Miskulin e Baranauskas, 1991).

Dessa forma, foi possível ao sujeito do Estudo de Caso de nossa pesquisa, com sua criatividade e a utilização adequada dos comandos **andar**, **cabecear**, **rolar** e **virar**, a obtenção de resultados corretos na tarefa de representar figuras planas com a utilização do Logo Tridimensional (Miskulin, 1994).

Na resolução de um outro problema trabalhado por nós em nossa pesquisa, o sujeito criou diferentes estratégias que lhe possibilitou a construção do círculo (Figuras 3 e 5), e em decorrência visualizou e criou uma estratégia para a construção da elipse (Figura 4),

evidenciando-se nesse contexto o inter-relacionamento da **Geometria da Tartaruga** com as **Geometrias Euclidiana e Analítica**.

Para evidenciar esses comentários apresentamos abaixo os programas computacionais desenvolvidos pelo sujeito de nossa pesquisa:

```
?ap circulot  
aprenda circulot  
repita 360 [ andar 0,4 virar 1 ]  
fim
```

```
circulot aprendido  
?tri circulot imprima
```

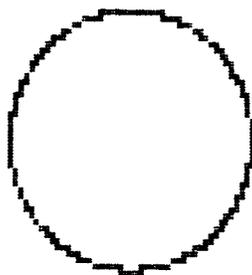


Figura 3 - Representação do círculo construído com o programa **circulot**

```
?ap elipseho  
aprenda elipseho  
cabecear 50  
circulot  
fim
```

```
elipseho aprendido  
?tri elipseho imprima
```

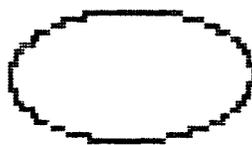


Figura 4 - Representação da elipse com o eixo maior na horizontal construído com o programa **elipseho**

```

?ap circcaro
aprenda circcaro
rolar 90
repita 360 [ andar 0,4 cabecear 1 ]
fim
circcaro aprendido
?tri circcaro imprima

```

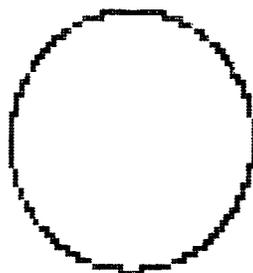


Figura 5 - Representação do círculo construído com o programa **circcaro**

Existe porém uma diferença de procedimentos entre cada uma das estratégias utilizadas na representação do contorno do círculo, cuja interpretação e entendimento devem ser parte do processo mental utilizado pelo sujeito. O pesquisador explorou uma dessas diferenças quando solicitou ao sujeito uma análise cuidadosa nos procedimentos que produziram as Figuras 3 e 5. Ambas representam um círculo, e são semelhantes. Desse modo o sujeito utilizando uma folha de papel explicou essa diferença: *"Ao desenhar o círculo com os comandos **andar** e **virar**, a tartaruga percorre a linha da figura no plano, como se fosse um compasso"*. Fazendo uso de sua mão para descrever os movimentos da tartaruga, completou: *"Ando por cima da folha onde a figura está desenhada."*, deslizando sua mão sobre a folha de papel, acompanhando a borda da figura. Após recortar o círculo e contorná-lo com a palma de sua mão direita, observou: *"Quando uso os comandos **andar** e **cabecear**, a tartaruga percorre o círculo por fora"*.

Ficou ressaltado, nos procedimentos acima, a diferença entre a representação de uma figura no plano e a existência de uma figura (objeto manipulável). Enquanto a representação de uma figura é o desenho desta sobre uma superfície, ao recortá-la passamos para a existência dessa figura que, apesar da ínfima espessura do papel, pode ser manuseada. Podemos até não considerar a terceira dimensão representada pela espessura do papel, mas nela é possível o deslocamento da Tartaruga. Observamos, pelos recursos utilizados durante a análise acima, a

compreensão e assimilação pelo sujeito, da "sintonicidade corporal", conceito inerente ao Logo (Para aprofundamento ver: Miskulin, 1994).

Nessa exploração do uso do Logo Tridimensional na construção de figuras geométricas planas, vários polígonos foram construídos pelo sujeito pesquisado, não só utilizando os comandos **andar** e **virar**, mas também utilizando combinações dos comandos **andar**, **cabecear**, **rolar** e **virar**. Pode-se inferir que o sujeito compreendeu a integração dos comandos **andar**, **cabecear**, **rolar** e **virar**, como um todo (Miskulin, 1994).

A atividade de programar no ambiente Logo constitui-se uma situação adequada para se observar e descrever as ações e reações do sujeito, ao resolver problemas, levantar hipóteses, criar estratégias, enfim, uma situação na qual pode-se inferir sobre os processos resolutivos do sujeito, ao controlar suas estratégias, atribuindo-lhes valores e significados para que possa realizar sua tarefa.

Desse modo, no processo de descrição de objetos no espaço, no segundo Estudo de Caso, realizado nesta pesquisa, quando o sujeito foi solicitado a representar a construção de um cubo, partiu novamente de conhecimentos prévios, referentes ao micro-mundo do Logo Bidimensional, tentando adaptar-se a essa nova realidade (contexto tridimensional) que o problema lhe impunha. Assim sendo, partiu para a construção de um primeiro cubo com os procedimentos do Logo Bidimensional (programa **cubobi1**, fig.6), para em seguida reelaborar seus procedimentos (programa **cubobi2**, fig. 7) e posteriormente passar a construí-lo com os procedimentos do Logo Tridimensional (programa **cubotri1**, fig. 8). Nesse processo evidenciou-se que o sujeito, apesar de estar consciente da necessidade de representar o cubo em um sistema diferente (Logo Tridimensional) e mais complexo, ainda não percebeu que o resultado de seu programa é diferente do anterior. Nota-se ainda que está preso ao aspecto figurativo e também à planificação geral de sua ação (fazer um cubo), não retoma os observáveis do objeto, ou seja, as particularidades do cubo: seis faces quadrangulares, entre outras, que lhe dariam a oportunidade de verificar que as representações das figuras relacionadas ao problema do cubo (Logo Bidimensional e Logo Tridimensional) (Figuras 7 e 8 a seguir), apesar de aparentarem iguais,

apresentam uma diferença devido à conicidade inerente à perspectiva cônica, subjacente ao Logo Tridimensional. Trabalha mais sobre as intenções (fazer um cubo) do que sobre os aspectos causais (particularidades do cubo) de sua representação. Não coordena, portanto, as particularidades inerentes ao cubo.

```
?ap cubobi1
aprenda cubobi1
repita 4 [ pf 30 pd 90 ]
pd 45 pf 20 pe 45
repita 4 [ pf 30 pd 90 ]
pf 30 pe 135 pf 20
pe 135 pf 30 pe 45 pf 20
pd 135 pf 30 pd 45 pf 20
fim
```

```
cubobi1 aprendido
?cubobi1 imprima
```

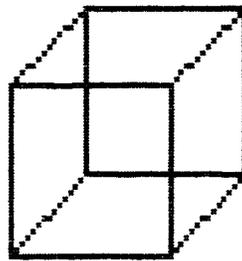


Figura 6 - Representação do cubo construído com o programa **cubobi1**

```
?ap cubobi2
aprenda cubobi2:x
pe 20
repita 2 [ pf :x pe 70 pf :x pe 110 ]
pe 120 pf :x pd 120
repita 2 [ pf :x pe 70 pf :x pe 110 ]
pf :x pd 60 pf :x
pe 130 pf :x
pe 50 pf :x
pe 60 pf :x pe 120 pf :x
fim
```

```
cubobi2 aprendido
?cubobi2 30 imprima
```

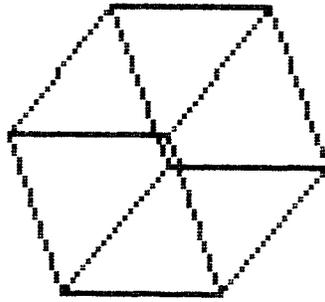


Figura 7 - Representação do cubo construído com o programa **cubobi2**

```
?ap cubotri1
aprenda cubotri1 :x :y :z :w
rolar :y
cabecear :z
virar :w
repita 4 [ quatri :x andar :x cabecear 90 ]
fim
```

cubotri1 aprendido

```
?ap quatri
aprenda quatri :x
repita 4 [ andar :x virar :90 ]
fim
```

quatri aprendido

no qual:

x representa o comprimento das arestas do cubo,

y representa o ângulo desejado para o cubo rolar,

z representa o ângulo desejado para o cubo cabecear,

w representa o ângulo desejado para o cubo virar.

Assim sendo, o sujeito atribuiu os seguintes valores às variáveis do programa **cubotri1**⁴, a fim de representar a Figura 8, disposta abaixo:

```
?tri cubotri1 30 30 -30 0 imprima
```

⁴ Convém explicitarmos que neste momento, o programa utilizado na representação do cubo, em realidade, não contém a descrição das faces que representam as “tampas” do cubo. Porém, para a finalidade específica tal fato não se configura como um problema. O procedimento completo será apresentado adiante, através do programa **cubotri2**.

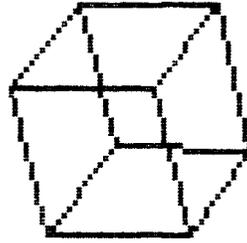


Figura 8 - Representação do cubo construído com o programa **cubotri1**

Constata-se assim que com a utilização do Logo Bidimensional, à primeira vista podem-se obter na tela do computador, os mesmos resultados que se consegue através do Logo Tridimensional. Por exemplo, pode-se definir procedimentos usando o Logo Bidimensional, para que se produza o desenho que representa um cubo. Ressalta-se, entretanto, que para essa tarefa estarão envolvidos processos de representação, os quais, para o usuário despreparado, que não conhece as regras da projeção cônica, intrínseca à sua representação, poderão significar uma barreira intransponível. Estamos nos referindo principalmente à utilização da projeção cônica, e ao fato de existir no real a possibilidade de "enxergarmos" os objetos com mais de um ponto de fuga, como representado na Figura 9, abaixo:

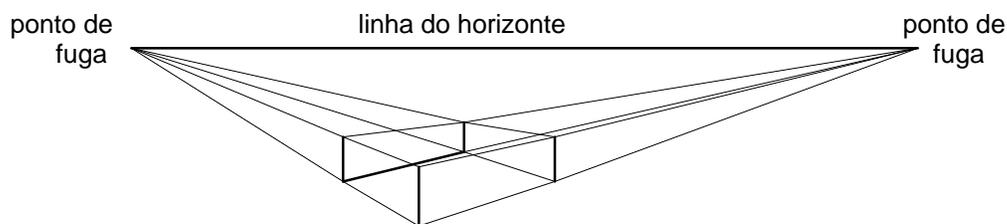


Figura 9 - Representação de um objeto com dois pontos de fuga

Nos procedimentos mais usuais, deparamo-nos com simplificações que trazem como consequência distorções entre a imagem do real e a representação assim obtida, sem contudo comprometer a "percepção" do objeto representado, fato esse evidenciado em um dos projetos desenvolvidos pelo sujeito de nossa pesquisa (representação do cubo construído com Logo Bidimensional - Figura 7).

Nesse sentido, ressaltam-se as potencialidades do Logo Tridimensional que possui inerente aos seus procedimentos as regras da projeção cônica, sendo que nesse contexto o usuário pode trabalhar com conceitos sobre projeção, de forma simples e concisa, sem a demasiada abstração da Geometria tradicionalmente trabalhada no contexto educacional atual.

No processo de resolução do problema do cubo, depois de buscar várias estratégias diferentes e explicitá-las, pode-se inferir que o sujeito realmente entendeu a representação do cubo, compreendendo seu significado, ou seja, para realmente representar um cubo percebeu que não basta somente a representação das arestas das faces laterais, mas é necessário a construção de sua tampa e de seu fundo, que expressam suas características como sólido geométrico, e não como figura espacial. Nota-se nesse momento o inter-relacionamento da **Geometria da Tartaruga** com a **Geometria Espacial**.

O trabalho com Logo Tridimensional concentra-se, pois, não na representação plana do objeto na tela, mas sim na descrição espacial do objeto. Dessa forma, o desenho de um cubo é produzido através da descrição dos movimentos (no espaço) que a Tartaruga deve fazer para percorrer as arestas das seis faces que compõem o cubo, como ilustrado na Figura 10.

```
?ap cubotri2
aprenda cubotri2 :x :y :z :w
cubotri1 :x :y :z :w
tampa1 :x
tampa2 :x
fim

cubotri2 aprendido

?ap tampa1
aprenda tampa1 :x
rolar 90
repita 4 [ andar :x virar -90 ]
fim

tampa1 aprendido

?ap tampa2 :x
aprenda tampa2 :x
un virar 90 cabecear 90 andar :x cabecear 90 ul
repita 4 [ andar :x virar -90 ]
```

fim

tampa2 aprendido

no qual,

x representa a dimensão das arestas expressa em passos da tartaruga,

y representa o ângulo em graus que se deseja rolar o cubo,

z representa o ângulo em graus que se deseja cabecear o cubo,

w representa o ângulo em graus que se deseja virar o cubo.

Como variáveis de entrada o sujeito forneceu os valores abaixo, com o resultado reproduzido na Figura 10:

?tri cubotri2 30 30 50 30 imprima

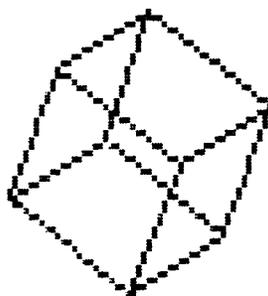


Figura 10 - Representação do cubo "com tampas" construído com o programa **cubotri2**

Essa descrição geométrica do objeto lhe é inerente, no sentido de que ela não faz referência a nenhum elemento que lhe é externo. Esse fato não é evidenciado no ensino tradicional da Geometria, no qual a descrição geométrica é externa às figuras, no sentido de que primeiramente o indivíduo, realizando a tarefa de representar um sólido qualquer, lança mão de fórmulas e algoritmos, leis e teoremas, pertencentes à Geometria, para conseguir o seu intuito. Nesse sentido, afirmamos que é justamente a Geometria que, se por um lado relaciona-se à intuição e conduz ao descobrimento, por outro lado possibilita a conjunção entre o mundo físico e a Matemática, e é esse o objetivo da utilização do Logo Tridimensional, ou seja, integrar as

figuras projetadas no mundo real, através da descrição espacial dos objetos e de sua visualização no plano (tela do computador).

O fato da descrição geométrica ser intrínseca ao sistema do Logo Tridimensional possibilita ao usuário trabalhar com conceitos matemáticos como: retas paralelas, retas perpendiculares, conceitos sobre polígonos, poliedros, propriedades das figuras planas, entre outras, sem a demasiada axiomatização das fórmulas, algoritmos prontos e a grande abstração da Matemática e da Geometria.

Pode-se inferir, nesse contexto, que o usuário do Logo Tridimensional usa conhecimentos matemáticos e geométricos intuitivos, e por meio da arquitetura matemática que é inerente à Geometria da Tartaruga, vai abstraído e construindo os conhecimentos "aparentemente abstratos" de uma maneira simples e concisa. Ao se utilizar dos recursos computacionais do Logo Tridimensional observa-se no comportamento do sujeito a presença de reações típicas, aquelas que a teoria piagetiana, denomina **Abstrações**. Quando, por exemplo, o sujeito manipula um sólido geométrico (no caso, o cubo) e mesmo o identifica na tela, através de sua forma, esse conhecimento é retirado diretamente do objeto, isto é a sua representação é fruto de uma **abstração empírica**. Ao modificar as posições do cubo, manipulando-o, descobre, por **abstração pseudo-empírica** que todas as faces não se mostram visíveis num mesmo momento ao sujeito. Essa dedução é feita a partir do que o sujeito retira diretamente de sua ação sobre o objeto, daí configurar um exemplo desse tipo de abstração. Trata-se, de fato, de uma reflexão, porém retirada durante as explorações do real (manipulação do cubo de madeira).

Nas **abstrações reflexivas**, o conhecimento provém das coordenações das ações do sujeito sobre o objeto. Nesse caso, em um dos problemas trabalhados em nossa pesquisa, o comportamento do sujeito ao concluir que não podia pintar o cubo, pois a tinta escorria (Figura 8), revela-se como uma reação própria das **abstrações reflexivas**, em que a dedução se processa no momento em que o sujeito percebe a conjugação de fatores necessários à solução de seu problema (pintar o cubo). **As abstrações refletidas** estão representadas em todos os momentos em que o sujeito explicitamente formaliza suas idéias sob a forma de procedimentos que

compõem seus programas, desde os mais simples (Figura 6) ao programa final, mais complexo (Figura 10), que contém a descrição geométrica mais consistente com a solução desejada – construir um sólido geométrico, o cubo, em um sistema tridimensional.

Pode-se constatar que o desenho de figuras geométricas no micromundo do Logo Bidimensional implica na coordenação dos movimentos de deslocamento e de giro. O mesmo ocorre no micromundo do Logo Tridimensional. Porém, no sistema do Logo Bidimensional, essa coordenação processa-se através de dois eixos coordenados representados no sistema cartesiano (horizontal e vertical), enquanto que com o Logo Tridimensional, acresce-se mais um eixo, o perpendicular à tela do monitor.

Decorre dessa forma que o desenho de um sólido, sem o recurso tecnológico da holografia, implica em um tipo de raciocínio mais complexo para o usuário, o qual terá que considerar movimentos da Tartaruga que não são os mesmos utilizados no Logo Bidimensional, pois o Logo Tridimensional envolve também a noção de profundidade, enquanto que no plano (Logo Bidimensional), só se trabalha com duas dimensões, a altura e a largura.

Constatou-se, durante os estudos das situações práticas de nossa pesquisa, o **dinamismo microgenético das condutas cognitivas** do sujeito. Assim sendo, a análise microgenética, que aborda a inteligência em ação, no curso da construção de conceitos geométricos, mostra-nos a inter-relação dos aspectos funcionais e estruturais da constituição do conhecimento e as interações entre o sujeito e o seu objeto de conhecimento (representação da construção do cubo no computador).

Desse modo, a análise microgenética nos fornece subsídios a fim de elucidar o processo pedagógico, no que se refere aos caminhos e meios que o sujeito inventa e descobre para levar em conta e lançar mão de seus conhecimentos anteriores em função do que necessitou descobrir em um contexto específico de resolução de problemas. E além disso, refere-se aos meios que os professores podem usar para instigar e provocar o desenvolvimento do raciocínio do sujeito e, assim sendo, torná-lo ativo no processo de construção do conhecimento, em ambientes educacionais informatizados.

Um fato importante a ser destacado em um outro momento dessa interação nesse Estudo de Caso, ocorreu quando o pesquisador solicitou ao sujeito que representasse uma casa com o Logo Tridimensional (Figura 11), incitando-o desse modo, a coordenar mais de um sólido, integrando-os como um todo na representação do problema. No processo de resolução desse problema o sujeito partiu da mesma estratégia que utilizou no programa anterior, lançando mão dos recursos que conhecia do contexto bidimensional e tentando adaptá-los ao novo esquema representacional (contexto tridimensional). Nesse processo de representação da construção da casa, o sujeito utilizou regras da projeção paralela ou cavaleira, sendo que esse tópico pode ser trabalhado como uma das conexões entre a **Geometria da Tartaruga** e a **Geometria Projetiva** (Miskulin, 1994).

```
?ap casatri
aprenda casatri :x :y :z :w
virar :x
rolar :y
cabecear :z
corpo :w
telhado :w
frente :w
fundo :w
fim
```

```
?ap corpo
aprenda corpo :w
repita 4 [ retn :w andar :w cabecear -90 ]
fim
```

```
?ap retn
aprenda retn :w
repita 2 [ andar :w virar -90 andar :w * 2 virar -90 ]
fim
```

```
?ap telhado
aprenda telhado :w
andar :w cabecear -30
repita 3 [ retn :w andar :w cabecear -120 ]
fim
```

```
?ap frente
aprenda frente :w
andar :w cabecear -120
andar :w cabecear -30
repita 3 [andar :w cabecear -90 ]
fim
```

```
?ap fundo
aprenda fundo :w
```

```

cabecear 60 virar -90
andar :w * 2 virar 90
frente :w
fim

```

casatri aprendido

no qual:

x representa o ângulo em graus segundo o qual se deseja virar a construção da casa,

y representa o ângulo em graus segundo o qual se deseja rolar a construção da casa,

z representa o ângulo em graus segundo o qual se deseja cabecear a construção da casa, e

w está associado às dimensões lineares da casa (largura, profundidade, pé direito, altura do telhado).

O sujeito apresentou as seguintes variáveis de entrada, com o resultado reproduzido na Figura 11 abaixo:

```
?tri casatri 0 40 -20 30 imprima
```

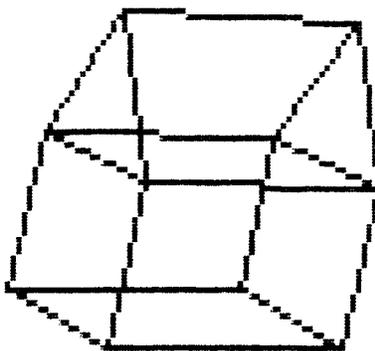


Figura 11 - Representação da casa construída com o programa **casatri**

Desse modo, com os recursos do Logo Bidimensional foi possível ao sujeito representar a casa em uma **única posição** em relação à tela. Assim sendo, processo análogo constata-se em uma pintura ou em uma fotografia: caso se deseje registrar a representação de um objeto em diferentes posições, o pintor reinicia seu trabalho em diferente tela, a partir de diferentes pontos de observações; ou o fotógrafo opera sua câmara fotográfica uma outra vez, posicionado em diferente ponto de observação em relação ao objeto. Nesse caso, o sujeito deveria alterar seus procedimentos utilizados durante a sua programação, e eventualmente usar diferentes estratégias,

a cada posição em que deseja representar a casa, revendo e alterando seu programa computacional em cada momento associado a uma nova posição. Com o Logo Bidimensional não foi possível ao sujeito elaborar um programa genérico (em relação a posições de observação e dimensões) que lhe permitisse a representação da casa em diferentes posições em relação à tela e, portanto, a representação de objetos espaciais. Isso significa que coordenar todas as variáveis no contexto Bidimensional para representar a casa de uma maneira real não foi possível ao sujeito. No programa computacional apresentado pelo sujeito, torna-se possível somente processar alterações nas dimensões do objeto representado na tela, alterações estas, associadas à variável de entrada do programa **casabi**, que define os passos da Tartaruga nos comandos para frente (pf) e para trás (pt), primitivas da Linguagem Computacional Logo.

Nesse momento, constatou-se que o sujeito sentiu necessidade de ultrapassar os limites do contexto bidimensional e suas limitações, adentrando-se no micromundo da Tartaruga no espaço.

No processo de resolução do projeto da representação da casa, a análise dos procedimentos do sujeito pesquisado, ao procurar compor os dois sólidos (prisma quadrangular - corpo da casa e prisma triangular - telhado da casa) e integrar o todo representado pela casa, com a construção da frente e do fundo, na visão microgenética, envolve um processo de generalização construtiva que se caracteriza por uma reconstrução de conhecimentos anteriores advindos de outras situações-problema no contexto do Logo Tridimensional, com vistas a atingir um objetivo pré-determinado pelo sujeito. Essa reconstrução consiste em uma planificação dos procedimentos em que grande parte dos elementos que compõem a heurística procedural são meras adaptações de contextos vivenciados anteriormente no Logo Bidimensional. Contudo, o problema atual, isto é, a representação da construção da casa, é novo e exige do sujeito movimentos que vão da intenção (objetivos, fins do sujeito) às particularidades do objeto a ser construído (causalidade) e vice-versa, o que imprime à estratégia reavaliações, controles constantes, reajustes mais complexos do que na representação do problema do cubo, pois o problema atual exige a representação imagética da combinação de dois sólidos no espaço.

Dentre os conhecimentos novos que emergiram da situação-problema (representação da construção da casa), um especificamente refere-se ao entendimento do comando **cabecear** negativo integrado com a **sintonicidade corporal**, expressa pelo momento em que o sujeito compreendeu que, se a tartaruga andasse por fora do corpo da casa, essa situação não seria real (não seria possível percorrer por fora o piso da casa pois essa estaria apoiada sobre o solo); nesse sentido, a sintonicidade corporal não seria constatada. Um segundo momento em que o sujeito compreendeu a sintonicidade corporal foi durante a construção do telhado que, ao ser integrado ao corpo da casa, não permitiu à tartaruga percorrê-lo por fora, compreendendo dessa forma que não poderia **cabecear** positivo. Para que fosse possível ao sujeito sintonizar-se corporalmente com o movimento da tartaruga no espaço, o pesquisador⁵ interferiu solicitando ao sujeito, para que esse desenhasse um quadrado, com isso, incitou-o a adentrar-se em uma investigação e busca da compreensão do comando **cabecear**, seja positivo, seja negativo. Em seguida, lançou mão de outro problema: a construção de uma estrela de cinco pontas, que implica na elaboração de um procedimento mais complexo do que o do quadrado e mais adequado para que o sujeito compreenda os efeitos da coordenação do comando **cabecear** positivo e negativo, já que esse fato havia se constituído em um conflito cognitivo para o sujeito, no momento da construção do quadrado, quando este refletiu: "*Então eu não posso cabecear negativo?*".

Tendo compreendido a coordenação dos comandos **cabecear** negativo e positivo, através do traçado da estrela, projeto realizado pelo sujeito pesquisado, conseguiu perceber também necessidade de reestruturar sua estratégia ao construir o fundo e a frente da casa, pois compreendeu a impossibilidade da Tartaruga representa-los percorrendo-os por dentro (**cabecear** negativo), por se tratarem de figuras planas, e percorrendo-os por fora (**cabecear** positivo) dado que a casa está apoiada sobre o solo, em uma situação real. A reestruturação de sua estratégia constituiu-se na substituição do comando **cabecear** pelo comando **virar** no sub-procedimento **frente** (Para melhor compreensão ver: Miskulin, 1994).

Convém ressaltar que a inclusão de problema da natureza do quadrado não tem como finalidade específica ensinar o sujeito a usar o comando, mas sim dialogar com as suas

⁵ Ressalta-se que o pesquisador nesse caso, trata-se da autora da pesquisa.

dificuldades, a partir de uma situação mais familiar em que ele possa estabelecer mais facilmente correspondências e analogias. Trata-se, portanto, da utilização de uma situação-problema atuando nesse contexto como "**objeto para se pensar sobre**", e do aproveitamento do conhecimento anterior, e portanto do êxito, objetivando incitar o sujeito a avançar na compreensão do conhecimento cada vez mais. Nesse sentido, o êxito pode ser mais fecundo do que o erro no processo de construção de noções geométricas. Assim sendo, a partir de aspectos como esses acima delineados que nós professores devemos sempre que necessário lançar mão, em nossa prática educativa, para que a tornemos cada vez mais significativa aos nossos alunos.

Nesse processo de interação, notamos que, coordenar os deslocamentos da tartaruga para "traçar" as figuras geométricas com o Logo Bidimensional e coordenar os mesmos deslocamentos no espaço implicam em operações qualitativamente diferentes. No contexto do Logo Bidimensional, no plano, essas coordenações exigem do usuário um grau menor de complexidade para a solução do problema. Todas as regulações (antecipações, compensações e outras) se reduzem às coordenações de duas dimensões (altura e largura) que estão explícitas no contexto, seja na tela, seja na imaginação do sujeito. Ora, no Logo Tridimensional, essa coordenação implica também em uma nova dimensão (profundidade), que é implícita ao contexto e, portanto, exige uma maior abstração do usuário. Coordenar simultaneamente três dimensões e os comandos responsáveis pela representação tridimensional dos objetos, em uma tela bidimensional, implicam em vislumbrar a solução do problema, considerando uma tela que existe (tela do monitor) e os demais planos imaginários onde ocorrem as ações da Tartaruga, o que só é possível quando o sujeito é capaz de operar sobre o real e o virtual concomitantemente.

Essa coordenação se torna ainda mais complexa quando o sujeito, ao desenhar a casa no Logo Tridimensional, necessita trabalhar ao mesmo tempo com as especificidades da construção de um sólido na tela, como resultado da coordenação de outros sólidos, com as diferentes possibilidades de representá-lo em diferentes posições na tela. Na planificação e execução dos procedimentos referentes à representação da casa no Logo Tridimensional, o sujeito necessitou subordinar certos meios à certos fins, que exigiam coordenação de coordenações, próprias de raciocínios formais.

A análise microgenética permite perceber não apenas as formas de raciocínios necessários à resolução de um dado problema mas, além disso, o modo pelo qual a criação de heurística está subordinada aos controles e conhecimentos anteriores do sujeito (representação de figuras planas, representação do cubo, entre outros) e aos fins (representação da casa).

Generalizar, portanto, não é simplesmente um processo de repetição de procedimentos anteriores para servir a novos contextos. Trata-se de uma verdadeira reformulação de heurísticas, de planificações e de combinações anteriores e atuais, o que constitui sempre uma reconstrução, uma nova elaboração do problema.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As variáveis, enfatizadas acima (ambientes informatizados, contexto Logo e análise microgenética), constituem ao nosso ver elementos básicos e importantes aos professores e pesquisadores, possibilitando dessa maneira, um repensar sobre suas práticas pedagógicas e, desse modo, um possível redimensionamento no processo Ensino/Aprendizagem da Geometria

Na análise da descrição dos problemas propostos, foi-nos possível constatar que o comportamento do sujeito ao resolver problemas atualmente pôde ser ampliado de modo a se compreender todos os meandros resolutivos que significam muito mais do que listar passos pelos quais o sujeito chega a uma conclusão, mas, acima de tudo, busca-se entender como esses passos se encadeiam no processo geral inerente a uma estratégia escolhida. Trata-se de uma análise que dá conta da compreensão dos processos mentais do sujeito e da criação de heurísticas, constituindo desse modo um contexto extremamente útil aos educadores comprometidos com a aprendizagem ativa e com o ensino que provoca situações desafiantes.

Desse modo, buscam-se nas particularidades e nas especificidades de uma situação-problema, fatos evidenciados que podem ser de grande utilidade para o professor de Matemática,

em sala de aula, mais especificamente, no que se refere ao seu desempenho diante dos atos de ensinar e aprender. Convém alertar que, se o professor não tiver acesso aos crescentes avanços tecnológicos, incorre-se no risco de tornarmos os atuais métodos de ensino obsoletos, muito aquém do ensino que se almeja, aumentando cada vez mais o desvínculo entre a escola e a sociedade.

A atividade de programar no ambiente Logo constitui-se uma situação adequada para se observar e descrever as ações e reações do sujeito, ao resolver problemas, levantar hipóteses, criar estratégias, enfim, uma situação na qual pode-se inferir sobre os processos resolutivos do sujeito, ao controlar suas estratégias, atribuindo-lhes valores e significados para que possa realizar sua tarefa.

Pelos resultados obtidos torna-se evidente a potencialidade e as idéias poderosas do ambiente computadorizado, mais especificamente do contexto Logo pois este está sempre sugerindo ao sujeito aquisição de novos conhecimentos e proporcionando condições de reelaboração de suas estratégias, criação de heurísticas e, finalmente, possibilitando a construção de novas idéias. Esse paradigma se distingue como ferramenta educacional pelos seus aspectos interativos que proporcionam aos usuários a geração de novos problemas e de novas possibilidades de resolução, constituindo-se dessa maneira, em um artefato metodológico que possibilita ao professor compreender o raciocínio do aluno e, dessa maneira, obter referências necessárias para o pleno desenvolvimento de sua proposta pedagógica.

Pelo exposto, evidencia-se que, além de atingirmos nosso propósito, de delinear um contexto favorável à implementação de uma proposta metodológica alternativa que respondeu o problema – **É possível resgatar ou captar algumas formas de abordagens do desenvolvimento histórico da Geometria através do ambiente Logo?** – esse estudo propiciou-nos subsídios teórico-metodológicos para nos posicionar como professores-pesquisadores preocupados em redimensionar e integrar nossos métodos de trabalho com a nova realidade que se impõe com o avanço da tecnologia em nossa sociedade.

BIBLIOGRAFIA

- ABELSON, Harold, diSESSA, Andrea A. (1981) *Turtle Geometry: The Computer as a Medium for Exploring Mathematics*. Cambridge: MIT Press.
- ACKERMANN, Edith (1990) *Pathways into a child's mind: helping children become epistemologists*. In: HELTNE, P., MARQUARDT, L. (Ed.) *Symposium Proceedings Science Learning in the Informal Setting*. Chicago, p.7-19.
- BARANAUSKAS, Maria Cecília Calani (1993) *Procedimento, Função, Objeto ou Lógica? Linguagens de Programação vistas pelos seus Paradigmas*. In: VALENTE, José Armando (Org.) *Computadores e conhecimento: repensando a educação*. Campinas: UNICAMP.
- BOVET, Magali, VOELIN, Daphné (1990) *Exame e aprendizagem operatórias: é preciso escolher entre as abordagens estrutural e funcional?* In *Archives de Psychologie*, 58, p.197-212.
- CLEMENTS, D.H., BATTISTA, M.T. (1991) *Geometry And Spatial Reasoning*. In: NCTM-TÓPICO-18 p.420-465.
- D'AMBROSIO, Ubiratan (1993) *Educação Matemática: Uma Visão da Arte*. In: *Pro-Posições*, v.4, n.1[10], p.7-17.
- D'AMBROSIO, Ubiratan (1990) *Etnomatemática: Arte ou Técnica de Explicar e Conhecer*. São Paulo: Ática.
- GADOTTI, Moacir (1989) *Convite à Leitura de Paulo Freire*. São Paulo: Scipione.
- GATTI, Bernadete (1992) *Informatização e Tecnologia*. In: SERBINO, Raquel Volpato, BERNARDO, Maristela Veloso Campos (Org.) *Educadores para o Século XXI: Uma Visão Multidisciplinar*. São Paulo: UNESP.
- GERDES, Paulus (1986) *Sobre o despertar do pensamento geométrico*. Dresden (RDA): Instituto Superior Pedagógico Karl Friedrich Wander. (Tese de Doutorado em Filosofia).
- HOYLES, Celia, NOSS, Richard (Org.) (1992) *Learning Mathematics and Logo*. Cambridge: MIT Press.
- HOYLES, Celia (1988) *Logo And Mathematics Education (LME 4) at The International Congress of Mathematics Education: A Report*. From Joel Hillel and Celia Hoyles in *Logo Exchange-December* (p.18).
- INHELDER, Bärbel, CELLÉRIER, Guy, et al. (1992) *Le Cheminement des découvertes de l'enfant. Recherche sur les microgenèses cognitives*. Paris: Delachaux et Niestlé.
- KILPATRICK, Jeremy (1992) *A History of Research In Mathematics Education*. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, p.3-38.
- LORENZATO, Sergio (1976) *Subsídios metodológicos para o ensino da matemática: área de figuras planas*. Campinas: Faculdade de Educação da UNICAMP. (Tese de Doutorado em Educação).
- MATOS, J.F. (1991) *Logo na Educação Matemática: Um Estudo Sobre as Concepções e Atitudes dos Alunos*. Tese de Doutorado, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa.
- MISKULIN, Rosana Giaretta Sguerra (1994) *Dinamismo Microgenético das Condutas Cognitivas no Processo de Construção de Noções Geométricas em Ambientes Informatizados*. In: II Congresso Ibero-americano de Informática na Educação. Lisboa, Anais. Anais do II Ccongresso Ibero-Americano de Informática na Educação, p.373-390.
- MISKULIN, Rosana Giaretta Sguerra (1994) *Concepções Teórico-Metodológicas Baseadas em Logo e em Resolução de Problemas para o Processo Ensino/Aprendizagem de Geometria*. Dissertação de Mestrado em

- Educação, Departamento de Metodologia de Ensino da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas. Unicamp.
- MISKULIN, Rosana Giaretta Sguerra (1993) *Tridimensional Logo: Art or/and Geometry?* In: The Tenth International Conference on Tecnology and Education, Cambridge - USA, Proceedings, p.1016-1018.
- MISKULIN, Rosana Giaretta Sguerra, BARANAUSKAS, Maria Cecília Calani (1991) *Logo tridimensional como estratégia para a exploração da geometria espacial.* In: II Encontro Paulista de Educação Matemática. São Paulo, Anais, p.150-151.
- PAPERT, Seymour (1993) *The Children's Machine: Rethinking School in the Age of the Computer.* New York: Basic Books.
- PAPERT, Seymour (1985) *Logo: Computadores e Educação.* São Paulo: Brasiliense.
- PIAGET, Jean, INHELDER, Bärbel (1993) *A representação do espaço na criança.* Porto Alegre: Artes Médicas.
- PIAGET, Jean (1984) *Para Onde Vai a Educação.* 8.ed. Rio de Janeiro: José Olympio.
- PIAGET, Jean, INHELDER, Bärbel (1975) *A Gênese das Estruturas Lógicas Elementares.* Rio de Janeiro: Zahar.
- REGGINI, Horacio C. (1988) *Computadoras: Creatividad o Automatismo?* Buenos Aires: Ediciones Galápagos.
- REGGINI, Horacio C. (1985) *Ideas e Formas: Explorando el Espacio con Logo.* Buenos Aires: Ediciones Galápagos.
- RESNIK, M.D. (1988) *Mathematics from the structural point of view.* In: Revue Internationale de Philosophie, v.42, n.167, 4, p.400-424.
- VALENTE, José Armando (1993) *Diferentes usos do computador na educação.* In: VALENTE, José Armando (Org.) *Computadores e Conhecimento: Repensando a Educação.* Campinas: UNICAMP.
- VITALE, Bruno (1991) *Computador na Escola um Brinquedo a mais?* In: Ciência Hoje, v.13, n.77, out/nov, p.19-25.

ANEXO

PROCEDIMENTOS DA FIGURA 5

```
?ap programa
aprenda programa
tpt1
qab
qbc
qca
quadribc
quadriab
quadriac
centro
pin
fim
```

programa aprendido

```
?ap tpt1
aprenda tpt1
un
mudepos [-50 40]
ul
mudepos [-50 0]
mudepos [-20 0]
mudepos [-50 40]
fim
```

tpt1 aprendido

```
?ap qab
aprenda qab
pe 90
repita 4 [ pf 40 pe 90 ]
fim
```

qab aprendido

```
?ap qbc
aprenda qbc
un mudepos [-50 0]
pe 90 ul
repita 4 [ pf 30 pe 90 ]
fim
```

qbc aprendido

?ap qca
 aprenda qca
 un mudepos [-20 0]
 pd (90 + arctan (4 / 3)) ul
 repita 4 [pf 50 pd 90]
 fim

qca aprendido

?ap quadribc
 aprenda quadribc
 repita 4 [pf 10 pd 90 pf 50 pt 50 pe 90]
 mudepos [-20 0] pe 90
 repita 4 [pf 10 pe 90 pf 50 pt 50 pd 90]
 fim

quadribc aprendido

?ap quadriab
 aprenda quadriab
 un mudepos [-50 40]
 pe (180 - (arctan (4 / 3))) ul
 repita 3 [pf 10 pe 90 pf 40 pt 40 pd 90]
 mudepos [-50 40] pe 90
 repita 3 [pf 10 pd 90 pf 40 pt 40 pe 90]
 fim

quadriab aprendido

?ap quadriac
 aprenda quadriac
 mudepos [-50 0]
 repita 2 [pf 10 pe 90 pf 30 pt 30 pd 90]
 mudepos [-50 0] pe 90
 repita 2 [pf 10 pd 90 pf 30 pt 30 pe 90]
 fim

quadriac aprendido

?ap centro
 aprenda centro
 un mudepos [0 0]
 fim

centro aprendido

?ap pin
 aprenda pin
 pintarab
 pintarbc
 pintarca
 fim

pin aprendido

?ap pintarab
 aprenda pintarab
 un mudepos [-50 40] pd 180 ul
 amarel azul
 pd 90 pt 40 pe 90 pf 30
 verde preto pe 180
 fim

pintarab aprendido

?ap pintarca
 aprenda pintarca
 un mudepos [-50 0] pd 90 ul
 verm pe 90
 fim

pintarca aprendido

?ap pintarbc
 aprenda pintarbc
 un mudepos [-20 0]
 pe ($90 - \arctan(4/3)$) ul
 verm amarel
 un mudepos [-50 40] pf 50 pd 90 ul
 azul pf 30 pe 90 verde pd 90
 pt 20 pe 90 pf 10 preto
 pd ($90 - \arctan(4/3)$) un
 mudepos [0 0] ul
 fim

pintarbc aprendido

?ap amarel
 aprenda amarel
 repita 2 [repita 3 [pintar 10 un pf 10 ul]
 un pt 30 pd 90 pf 10 pe 90 ul]
 fim

amarel aprendido

?ap azul
 aprenda azul
 repita 2 [repita 3 [pintar 13 un pf 10 ul]
 un pt 30 pd 90 pf 10 pe 90 ul]
 fim

azul aprendido

?ap verde
 aprenda verde
 repita 2 [pintar 4 pd 90 pf 10 pe 90]
 un pd 90 pf 10 pe 90 ul
 fim

verde aprendido

?ap vermelho

aprenda vermelho

repita 3 [repita 2 [pintar 8 un pf 10 ul]

un pt 20 pd 90 pf 10 pe 90 ul]

fim

vermelho aprendido

?ap preto

aprenda preto

repita 2 [pintar 1 pd 90 pf 10 pe 90]

fim

preto aprendido

?ap pintar

aprenda pintar :cor

un pd 45 pf 7 ul mudecl :cor pinte ul

pt 7 pe 45 ul mudecl 15

fim

pintar aprendido

?programa imprima