Capítulo 6

ANÁLISIS DE UN PROBLEMA: LAS ALTURAS DE UN TRIÁNGULO

Isabel Margarita Vargas Calvert*

INTRODUCCIÓN

Cursando una asignatura de Geometría en la Universidad Católica de Valparaíso, la profesora, Doctora Lidia Consigleri propuso un problema que me pareció muy interesante, tanto que yo a mi vez también lo he propuesto durante tres años consecutivos, a mis alumnos de primer semestre de Licenciatura en Educación Matemática de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, incluso más aún, al trabajar en cursillos de perfeccionamiento para profesores de Enseñanza Media (profesores de alumnos entre 14 y 18 años), también a ellos se lo he planteado, durante los talleres dedicados a la resolución de problemas y me he encontrado con que unos y otros lo han abordado usando estrategias muy similares, que llevan a la conclusión de que el concepto de altura de un triángulo no está perfectamente clarificado.

En Chile la educación escolar es de 12 años, los ocho primeros de Educación General Básica (obligatoria) y luego cuatro años de Educación Media, dividida en dos ciclos, de dos años cada uno, en el segundo de ellos los alumnos pueden optar por Educación Científico – Humanista o bien de tipo Técnico – Profesional, ambas permiten acceder a estudios superiores, tanto universitarios como técnicos, aunque no es el principal objetivo de la segunda.

* Docente do departamento de Matemática de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Santiago de Chile.

Entre las primeras nociones de Geometría que se tratan en la Educación Básica aparecen los polígonos y ya a los 12 o 13 años, en 7º año de Enseñanza Básica, los han clasificado de acuerdo a distintos criterios y se han dedicado a estudiar, especialmente los triángulos y sus elementos primarios y secundarios, es decir: lados y ángulos como también bisectrices, simetrales, transversales de gravedad, medianas y algunas de las relaciones que se pueden establecer entre ellos; también en este nivel se comienza con la medición de perímetros y áreas de figuras planas y del espacio.

El concepto de altura de un triángulo se trata por primera vez en 7º año de Enseñanza Básica, curso en el que se trazan las alturas de triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos. Nuevamente en 8º año se tratan los elementos secundarios del triángulo antes de estudiar áreas de polígonos y cuerpos, además de volúmenes de éstos; en 1º Medio se ve congruencia de figuras planas y dentro de ella se analizan las propiedades de los triángulos y cuadriláteros. Posteriormente, en 3º Medio nuevamente estudian área y volumen de sólidos y también geometría de proporciones en la que, entre otros se trata el teorema de Euclides que se refiere a la altura correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Si a un estudiante de 8º básico se le pregunta cómo puede calcular el área de un triángulo, él responderá que ésta mide el semi-producto de un lado del triángulo (base), por su correspondiente altura, incluso muchos intentarán repetir alguna definición de ésta. Como se ve la palabra no es desconocido para los estudiantes, aunque la conceptualización de ésta noción es deficitaria, como quedará en evidencia al ampliar un poco el campo de problemas en que ella está involucrada.

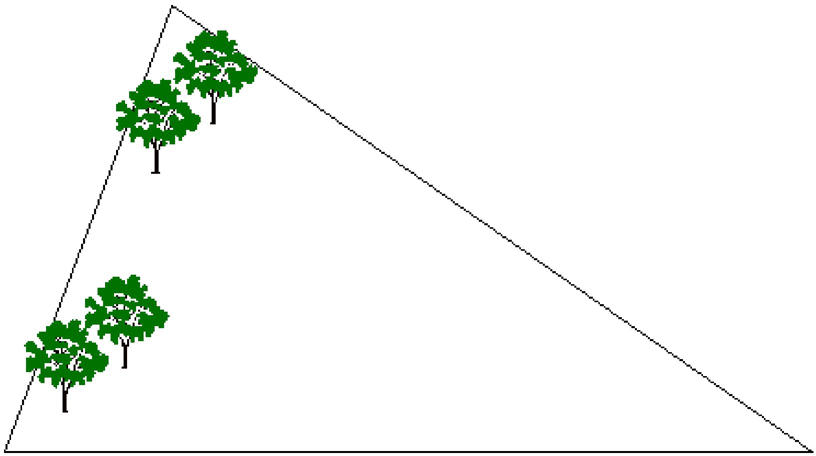
La situación procuró plantearse como una del tipo a-didáctico, porque el objetivo de la misma no es explícito y generalmente sólo se logra éste luego de generar una exposición de las distintas estrategias de resolución que hayan empleado los alumnos y su posterior discusión por parte del grupo curso.

El problema, tal como se lo encomiendo a mis alumnos está en la página siguiente:

UMCE **Lic. en Matemática**

Prof.: Isabel M. Vargas Calvert

TALLER Nº5: LA PARCELA

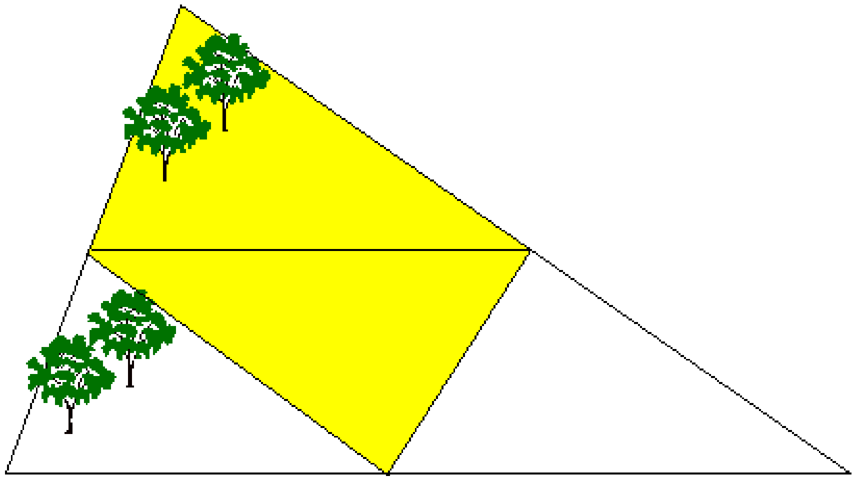


Dos campesinos, los hermanos Andrés y Beatriz Bellavista, recibieron como herencia de sus padres la parcela representada en la figura. ¿Cómo podrían repartirla equitativamente entre ambos?

Los alumnos de los cursos a los que se le aplicó el taller usaron diversas estrategias.

Estrategia 1 (usada por más del 50% de los alumnos):

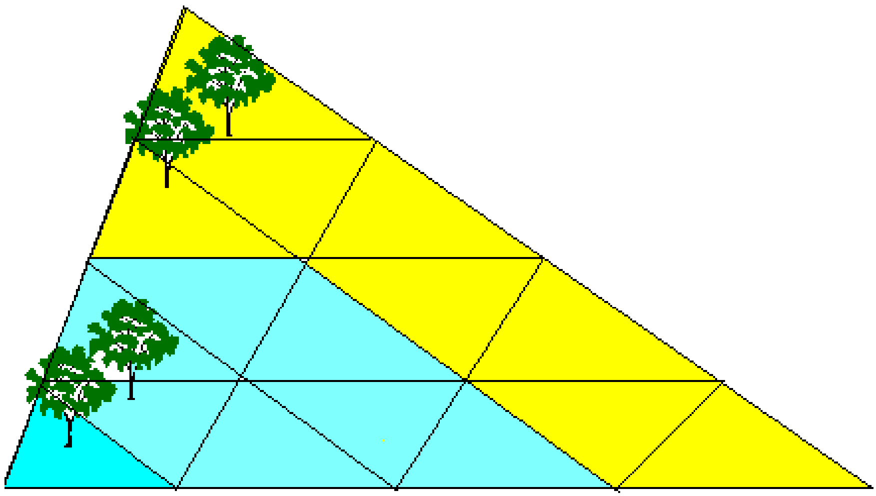
Trazar las medianas (segmentos que unen los puntos medios de los lados del triángulo) y aludiendo a que los cuatro triángulos que se forman son congruentes entre sí, justifican que dar a cada hermano dos regiones triangulares es una repartición equitativa.



Ante la solución Nº 1 se les planteó a los alumnos la siguiente pregunta: ¿Tendrían el mismo valor comercial los predios de ambos hermanos? De la discusión aparece la necesidad de "salvaguardar el libre paso por toda su propiedad de cada uno de los herederos", lo que se traduce en las nuevas propuestas que se describen a continuación:

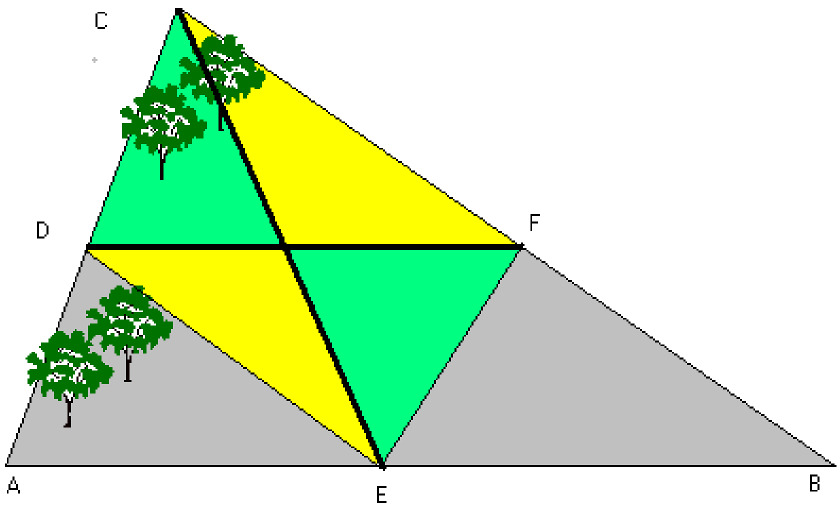
Estrategia 2

Trazar nuevamente medianas, ahora de cada uno de los cuatro nuevos triángulos obtenidos, de modo de contar con dieciséis triángulos congruentes entre sí y repartirlos como indica el esquema.



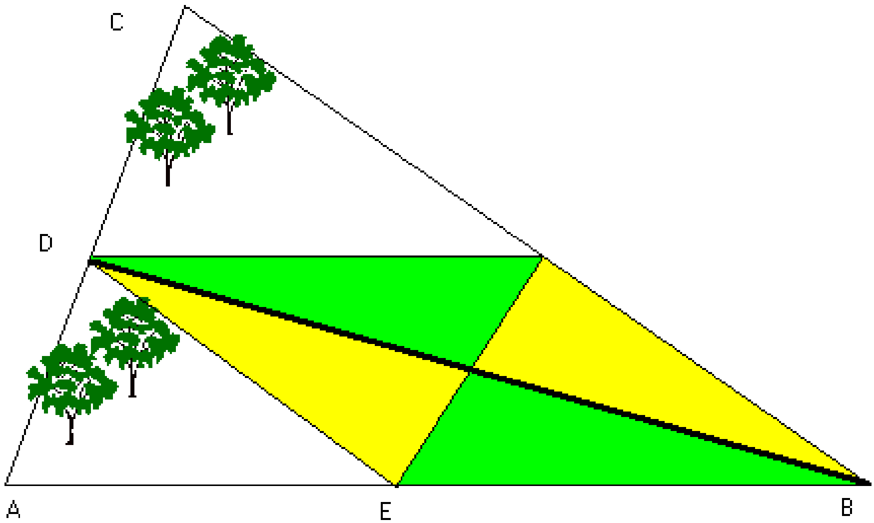
Estrategia 3

Reconocer que se forman paralelogramos, basándose en que las medianas son paralelas a los lados del triángulo, y que a ésos cada diagonal los divide en cuatro triángulos congruentes dos a dos, cosa que posibilita la repartición en dos triángulos AEC y BEC:



Estrategia 4

Algunos alumnos usan el mismo argumento aplicado a otro de los paralelogramos, observando que “sería de justicia” repartir no sólo las tierras, sino también los árboles, por consiguiente, consideran la diagonal $\overline{BD}$, como la frontera entre los dos terrenos.



Estrategia 5

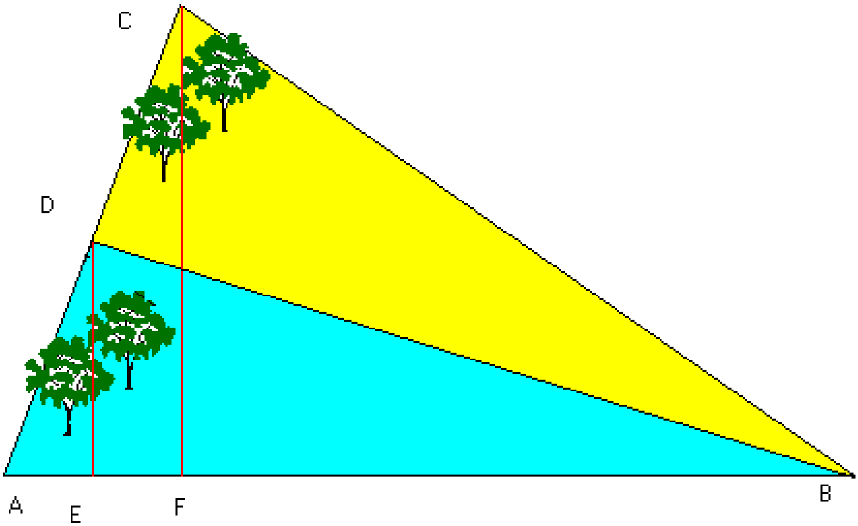
Otros estudiantes, los menos, comenzaron trazando una transversal de gravedad intentando probar que los triángulos que ésta determinaba eran congruentes entre sí, idea que sólo desecharon luego de proceder a medir los lados de ellos.

Estrategia 6

Otro de los intentos que resultó infructuoso fue calcular el área de la parcela, para ello consideraron que el dibujo debería estar a escala, por lo que midieron sus lados y luego, ya sea recurriendo al trazado y la medición de una de sus alturas o bien a la aplicación del teorema de Herón, procuraron lograr la repartición equitativa por tanteo.

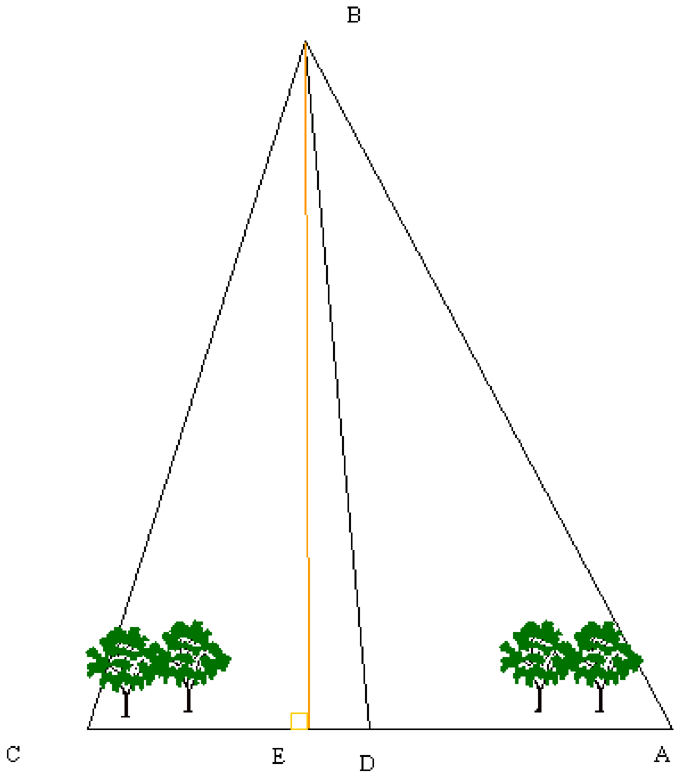
Estrategia 7

Procediendo como en el Nº 5, un alumno probó que los triángulos obtenidos tienen la misma área, arguyendo que los triángulos ABD y ABC tienen una base común $\overline{AB}$ y que la relación entre sus respectivas alturas es $h_D = \frac{1}{2} h_C$, de lo que se infiere que el área del triángulo ABD es la mitad del área del triángulo ABC, por lo que se concluyó que las áreas de los triángulos ABD y BDC son iguales.



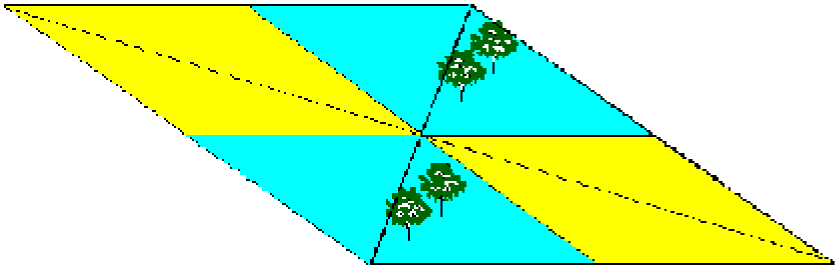
Estrategia 8

Otros alumnos representaron la parcela rotada, de modo que los árboles próximos al lado $\overline{AC}$ quedaron ubicados en la "horizontal", trazaron la transversal de gravedad correspondiente a $\overline{AC}$, trazaron la altura de ABC que pasa por B y procedieron buscando la razón entre las áreas de los triángulos CDB y ABC, para lograr esto consideraron que si las medidas de los lados del triángulo ABC son *a, b, c* y, en particular si se supone que CE mide x, entonces como D es el punto medio, ED mide $\frac{b}{2} - x$, luego aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos AEB y ECB, formando un sistema de ecuaciones lograron determinar la longitud de la altura BE en función de las medidas *a, b, c* de los lados y, por último, formaron la razón entre las áreas, llegando a que $\frac{á\Delta CDB}{á\Delta ABC} = \frac{1}{2}$, con lo que probaron que la transversal de gravedad divide a cualquier triángulo en dos que son equivalentes



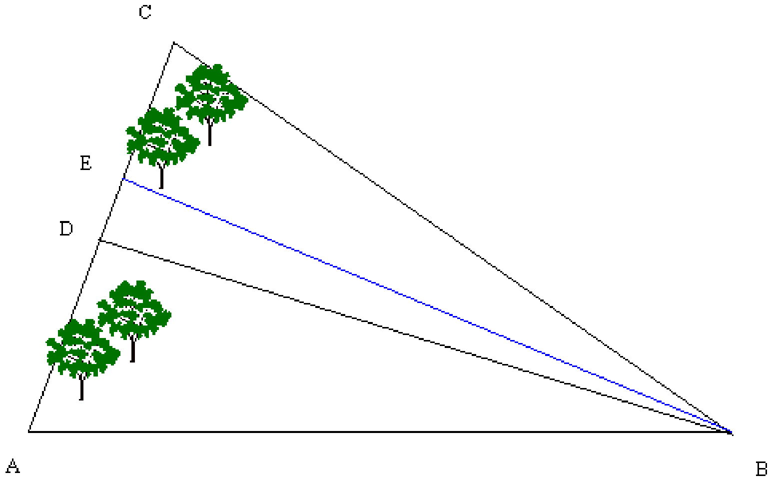
Estrategia 9

Algunos alumnos procedieron a hacer uso de una construcción auxiliar, que consistió en trazar paralelas a dos de los lados del triángulo, donde el tercer lado apareciese como diagonal del paralelogramo obtenido, luego trazaron también las paralelas medias de éste. Aludiendo a que en un romboide, los triángulos determinados por una diagonal son congruentes entre sí, repartieron la parcela como indica el esquema:



Estrategia 10

Sólo un grupo de tres personas justificó la igualdad de áreas que produce una transversal de gravedad, con el argumento de que si D es punto medio de **Erro! Indicador não definido.**, las bases $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ son congruentes entre sí y la altura $\overline{BE}$ es común a los triángulos que se forman.



ANÁLISIS

Al revisar las estrategias empleadas por los alumnos puede inferirse que hay una serie de conocimientos puestos en acción, tales como:

- Propiedades de las medianas de un triángulo (estrategias 1, 2, 3, 4)
- Congruencia de triángulos (estrategias 1, 2, 3, 4,5)
- Propiedades de los paralelogramos (estrategias 3,4, 9)

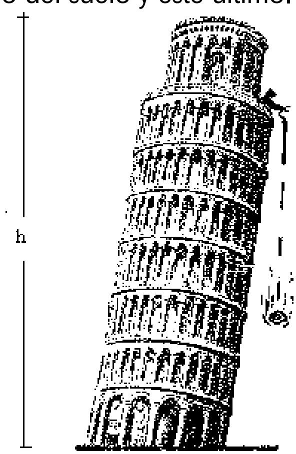
- Proporcionalidad de segmentos (estrategia 7)
- Semejanza de triángulos (estrategia 7)
- Teorema de Pitágoras (estrategia 8)
- Teorema de Herón para el área de un triángulo dadas las medidas de sus lados (estrategia 6)
- Concepto de equivalencia de figuras (en todas las estrategias)

Lo que resulta más significativo es que, aparentemente, todos saben que el área de un triángulo puede calcularse como $\frac{\text{base} * \text{altura}}{2}$, sin embargo son incapaces de reconocer la altura si se trata de un triángulo obtusángulo. ¿Por qué es tan difícil reconocer la altura en este caso?

Intento mostrar que existen numerosos obstáculos que dificultan el aprendizaje del concepto de altura, siendo éstos de diversa índole:

Obstáculos epistemológicos

- Aparentemente el concepto de altura no ofrece demasiadas complicaciones, sin embargo en el lenguaje natural es un término que se usa para referirse a la distancia que hay entre un objeto y la línea del horizonte. Por ejemplo, en el caso de la torre inclinada de Pisa, su altura indica la distancia entre el punto de la construcción que está más alejado del suelo y este último.



Para los estudiantes resulta más fácil reconocer una altura en un triángulo si está ubicada perpendicularmente sobre la línea que ellos asocien con la horizontal; este hecho se evidencia en la estrategia Nº8, en la que los alumnos para explicar, rotan la figura. En mi propia práctica también he podido observar que si a los alumnos se les pide que tracen las alturas de un triángulo, con ayuda de una escuadra, casi siempre proceden a ubicar un lado del triángulo horizontalmente y sobre él uno de los catetos de la escuadra, dejando el otro cateto hacia arriba, luego para trazar las otras alturas van girando el cuaderno, no la escuadra.

- Al punto de intersección entre dos rectas perpendiculares se le suele llamar “pie de la altura” y en lo cotidiano los pies se conciben pisando el piso, esto aparece como otro motivo por el cual se reconoce con mayor facilidad una altura que esté ubicada de este modo.

Obstáculos didácticos

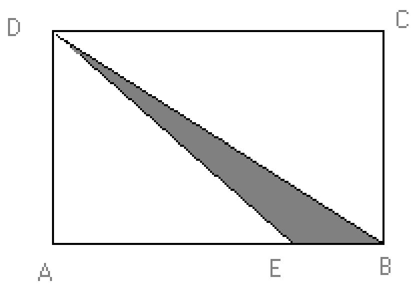
- Generalmente el campo conceptual de la noción de altura, en geometría, en el ámbito escolar, está reducido casi exclusivamente a triángulos acutángulos – escalenos, ya que éstos se consideran “los más generales”; también se tratan en forma especial los triángulos isósceles (casi siempre representado por un acutángulo) y los equiláteros, estos últimos por las particularidades que tienen sus elementos secundarios: bisectrices, transversales de gravedad, simetrales, alturas y sus puntos notables.
- En la transposición didáctica hecha en los textos escolares la definición más frecuente es la siguiente: “alturas de un triángulo son los segmentos de recta perpendiculares al lado del triángulo y que contienen al vértice opuesto a ese lado”. La revisión de esta definición podría llevar a concluir que los triángulos obtusángulos sólo tienen una altura, la correspondiente al mayor de los lados, porque ninguna de las perpendiculares que intersectan a los otros dos lados, contiene a los vértices opuestos.
- En el saber enseñado también es posible detectar que cuando el profesor traza una altura, frecuentemente lo expresa diciendo por ejemplo “Bajaré la altura que va del vértice ***A*** al lado de medida ***a”***.

Obstáculos psicológicos

Existe una tendencia a la búsqueda de regularidades o de generalización, si los otros elementos secundarios del triángulo siempre están en el interior del triángulo, lo que sucede también con las alturas de un acutángulo, esto lleva a hacer olvidar las "anomalías" que tienen las alturas; muchos alumnos tampoco consideran que los catetos de un triángulo rectángulo son también altura y base una de otra y, para calcular su área consideran que la medida de su superficie es la mitad de la de un rectángulo.

Un ejemplo ilustrativo puede ser la resolución del ejercicio siguiente, propuesto a alumnos que preparan la prueba de selección para el ingreso a las universidades.

¿Cuál es la razón entre las áreas de la región achurada y el rectángulo ABCD, si se sabe que EB = $\frac{AB}{5}$, AB = 25 cm., AD = 15 cm.?



Al abordar el problema la mayoría de los alumnos comienzan aplicando el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de los trazos $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ y, en este caso determinan la razón entre los perímetros del triángulo y el rectángulo. Otros proceden a calcular la diferencia entre el área del rectángulo y la suma de las áreas de los triángulos AED y BCD. Sólo cinco alumnos entre 40 reconocen al segmento $\overline{AD}$ como altura del triángulo EBD, a pesar de que está dibujada vertical y $\overline{EB}$ está sobre la horizontal.

CONCLUSIONES

Para mejorar la conceptualización de la altura se necesita atender a cada uno de los obstáculos señalados.

Con respecto a los obstáculos epistemológicos y psicológicos sería bueno guiar al alumno para distanciarlo del sistema referencial implícito determinado por la horizontal y la vertical; una manera de lograrlo podría ser trabajar en el patio del colegio, usando cuerdas y clavos para construir las figuras geométricas elementales a partir de sus definiciones y/o propiedades, para lo cual tendría que trabajarse con grupos pequeños, otra manera sería apoyarse en softwares que permiten dinamizar la geometría, tales como Sketchpad o Cabri Géomètre, de modo de ponerlo frente a las que llamé situaciones “anómalas” en las que, por ejemplo, tengan que reconocer cuál es el “pie de la perpendicular” o bien el ortocentro de un triángulo.

Con respecto a los obstáculos didácticos es necesario revisar cuidadosamente la transposición didáctica que se ha hecho en los textos escolares, tanto en lo correspondiente a las definiciones que en ellos aparecen, como a las representaciones en las cuales habría que variar la posición y el tipo de triángulo. También sería necesario ampliar el campo de problemas en los que la noción es puesta en juego.